(iii) اکنون فرض کنیم $y\in Y$ دلخواه باشد لذا $h(y)\in X$ پس

$$\exists x\in X;\ h(y)=x \Rightarrow (f\circ h)(y)=f(x) \Rightarrow I_Y(y)=f(x) \Rightarrow y=f(x)$$

یعنی f پوشاست $\square$

فصل ۴ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

بخش ۴-۱: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

یکی از اصول مهم در ریاضی که در اثبات‌ها بسیار به کار برده می‌شود (به‌خصوص در رابطه با گزاره یا احکامی راجع به اعداد طبیعی $\mathbb{N}$) اصل استقرای ریاضی است. در این بخش ابتدا به معرفی این اصل می‌پردازیم.

۴-۱-۱ اصل استقرای ریاضی

فرض کنیم $A\subseteq\mathbb{N}$ به گونه‌ای باشد که

(i) $1\in A$،

(ii) اگر $n\in A$ آنگاه $n+1\in A$،

در اینصورت $A=\mathbb{N}$.

در حقیقت اصل استقرای ریاضی معادل است با اینکه اگر $P(n)$ گزاره‌نمایی روی $\mathbb{N}$ باشد بطوریکه (i) $P(1)$ درست باشد و (ii) درستی $P(n)$ (فرض استقرایی) درستی $P(n+1)$ (حکم استقرایی) را نتیجه دهد آنگاه $P(n)$ برای هر $n\in\mathbb{N}$ درست است.

۴-۱-۲ (~~...~~ اصل استقرای ریاضی از k)

فرض کنیم گزاره‌نمای $P(n)$ روی $\mathbb{N}$ طوری باشد که برای هر عدد طبیعی k،

(i) $P(k)$ درست باشد و (ii) برای هر $n\geq k$ درستی $P(n)$، $P(n+1)$ را ایجاب کند

در این صورت $P(n)$ برای هر $n\geq k$ درست است.

۴-۱-۳ مثال:

با استقرای ریاضی ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

برهان: در اینجا $P(n): \; 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

به وضوح $P(1)$: $1 = \frac{1.2}{2}$ که برقرار است.

اکنون فرض می‌کنیم $P(n)$ درست باشد تا $P(n+1)$ را ثابت کنیم. لذا طبق فرض استقرا داریم

$P(n)$ $$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

اکنون به طرفین رابطه بالا $n+1$ اضافه می‌کنیم داریم

$$1+2+\cdots+n+n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow$$

ثابت شد که $P(n+1)$ برقرار است. بنابراین حکم طبق اصل استقرا برای هر n درست است $\square$

۴.۱.۴ تعریف: اگر A و B دو مجموعه و $A \in B$ آنگاه B را یک ابر مجموعه (از A) نامند.

۵.۱.۴ مثال: فرض کنیم مجموعه اعداد طبیعی زوج را با $\mathbb{N}_e$ نمایش دهیم لذا

$$\mathbb{N}_e = \{2, 4, 6, \ldots\}$$

اکنون تابع $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_e$ را با ضابطه $f(n) = 2n$ را در نظر می‌گیریم می‌توان دید

که f یک تابع دوسویی است.

۱- خوش تعریفی f:

۲- ویک به یکی

$$n_1 = n_2 \Leftrightarrow 2n_1 = 2n_2 \Leftrightarrow f(n_1) = f(n_2)$$

۳- پوشایی

$$\forall y \in \mathbb{N}_e \Rightarrow \overset{?}{\exists} x \in \mathbb{N};\; f(x) = y$$

کافی است $x = k$ اختیار شود زیرا $y \in \mathbb{N}_e \Rightarrow y = 2k \Rightarrow$

$$f(x) = f(k) = 2k = y$$

لذا $\mathbb{N}$ با $\mathbb{N}_e$ در تناظر یک به یک است هر چند $\mathbb{N}_e \subsetneqq \mathbb{N}$. به چنین مجموعه‌هایی با این خاصیت اصطلاحاً نامتناهی گویند به عبارت دقیق‌تر:

۶.۱.۴ تعریف: مجموعه X را نامتناهی گویند هرگاه زیرمجموعه‌ای سره یا حقیقی مثل Y داشته باشد به طوری که یک تناظر یک به یک بین X و Y موجود باشد. به عبارت دیگر مجموعه X را نامتناهی

گویند اگر و فقط اگر تابعی یک به یک از X به X چون f موجود باشد به طوری که f(X) یک زیرمجموعه سره از X باشد. مجموعه‌ای که نامتناهی نباشد را متناهی گویند.

مثال ۷.۱.۴: مجموعه تهی و مجموعه‌های تک عضوی متناهی هستند.

حل: چون مجموعه تهی هیچ زیرمجموعه سره یا حقیقی ندارد لذا نمی‌تواند نامتناهی باشد. پس تهی متناهی است. حال مجموعه تک عضوی دلخواه $\{a\}$ را در نظر بگیریم. چون تنها زیرمجموعه سره از $\{a\}$، $\emptyset$ است و هیچ تناظر یک به یکی بین $\{a\}$ و $\emptyset$ وجود ندارد لذا $\{a\}$ متناهی است.

قضیه ۸.۱.۴: (i). هر ابرمجموعه یک مجموعه نامتناهی، نامتناهی است.

(ii). هر زیرمجموعه یک مجموعه متناهی، متناهی است.

برهان (i). فرض کنیم X یک مجموعه نامتناهی و Y یک ابرمجموعه X یعنی $X\subseteq Y$. در این صورت بنا به تعریف مجموعه نامتناهی تابع یک به یک $f:X\to X$ وجود دارد که $f(X)\subsetneq X$. حال تابع $g:Y\to Y$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$g(y)=\begin{cases} f(y) & ,\ y\in X\\ y & \ \ y\in Y-X\end{cases}$$

اکنون باید نشان دهیم که g یک تابع یک به یک است و $g(Y)\neq Y$.

~~چون برای $y\in X$، $f(y)\in X$ لذا برای $y\in X$، چون $f(y)\neq y$ لذا $f(y)=g(y)$ چون f یک به یک است پس g هم یک به یک است. حال اگر $y\in Y-X$ چون برای $g(y)=y$~~

~~$y\in Y-X \Rightarrow \forall y\in X;\ g(y)=y\neq f(y_\circ)=g(y_\circ)$~~

یعنی فرض کنیم $g(y_1)=g(y_2)$ باید نشان دهیم $y_1=y_2$. سه حالت را در نظر می‌گیریم

(i). $y_1,y_2\in X$

(ii). $y_1,y_2\in Y-X$

(iii). $y_1\in X,\ y_2\in Y-X$

در حالت اول

$$y_1=y_2 \xleftarrow[1-1]{f} f(y_1)=g(y_1)=g(y_2)=f(y_2)$$

حالت (ii) $y_1 = g(y_1) = g(y_2) = y_2 \Leftarrow y_1 = y_2$

حالت (iii)

$X \ni f(y_1) = g(y_2) = y_2 \in Y - X$

$\times$.

این حالت رخ نخواهد داد.

لذا تابع g یک به یک است.

از طرف دیگر چون $f(X) \subsetneq X \subseteq Y$ لذا

$\exists u \in X ; u \notin f(X) = g(X)$

لذا

$g(Y) = g(X) \cup g(Y-X)$

$\subsetneq X \cup Y - X = Y$

پس Y یک مجموعه نامتناهی است.

(ii) فرض کنیم Y یک مجموعه متناهی و X زیرمجموعه‌ای از Y باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که X متناهی است. فرض کنیم چنین نباشد (فرض خلف) پس X نامتناهی باشد. در این صورت بنابر (i) باید Y هم نامتناهی باشد که این تناقض است. پس فرض خلف نادرست است. □

۹.۱.۳ قضیه: فرض کنیم $g: X \to Y$ یک تناظر یک به یک باشد. اگر مجموعه X نامتناهی باشد، Y نیز نامتناهی است.

برهان: چون X نامتناهی است لذا تابع ۱-۱ چون $f: X \to X$ موجود است که $f(X) \neq X$. چون g یک تابع دوسویی است، g^{-1} نیز یک تابع دوسویی خواهد بود لذا $g^{-1}: Y \to X$ یک تناظر یک به یک است

$Y \xrightarrow{g^{-1}} X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y$ $\qquad gofg^{-1}: Y \to Y$

یک تابع یک به یک است.

$h(Y) = (gofg^{-1})(Y) = gof(g^{-1}(Y)) = (gof)(X) = g(f(X))$

(چون g یک به یک است)

چون $f(X) \neq X$ لذا $g(f(X)) \neq g(X) = Y$ پس $h(Y) \neq Y$.

پس Y نامتناهی است. □

۱۰.۱.۳ نتیجه: فرض کنیم $g: X \to Y$ یک تناظر یک به یک باشد. اگر X متناهی باشد آنگاه Y نیز متناهی است.

برهان: با برهان خلف و قضیه قبل به راحتی بدست می‌آید. □

۱۱.۱.۴ قضیه: فرض کنیم X مجموعه‌ای نامتناهی و $x_0 \in X$. در این صورت $X-\{x_0\}$ نامتناهی است.

برهان: چون X نامتناهی است لذا تابعی یک‌به‌یک مانند $f: X \to X$ وجود دارد به طوری که $f(X) \subsetneq X$

دو حالت در نظر می‌گیریم (i) $x_0 \in f(X)$ ، ii $x_0 \in X - f(X)$. در هر حالت باید تابعی یک‌به‌یک $g: X-\{x_0\} \to X-\{x_0\}$ بسازیم به طوری که

$$g(X-\{x_0\}) \neq X-\{x_0\}$$

حالت (i). $x_0 \in f(X)$. در این حالت $x_1 \in X$ موجود است که $f(x_1) = x_0$ در این حالت تعریف می‌کنیم

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر}\ x \neq x_1 \\ x_2 & x = x_1 \in X-\{x_0\} \end{cases}$$

که x_2 عضو ثابتی از مجموعه ناتهی (دلخواه) $X - f(X)$

باشد. در این صورت بدیهی است که g یک‌به‌یک است زیرا f یک‌به‌یک بوده و دامنه g روی x_1 عضوی شده که مخالف x_0 است لذا در $X-\{x_0\}$ قرار می‌گیرد.

و در $X - f(X)$ است لذا با هیچ $f(x)$ ای برابر نیست

$$g(X-\{x_0\}) = f(X-\{x_0, x_1\}) \cup \{f(x_1)\} = f(X-\{x_0, x_1\}) \cup \{x_2\}$$
$$\neq X-\{x_0\}$$

حالت (ii). اگر $x_0 \in X - f(X)$ که در این صورت $g: X-\{x_0\} \to X-\{x_0\}$ را با ضابطه $g(x) = f(x)$ تعریف می‌کنیم لذا g یک‌به‌یک

$$g(X-\{x_0\}) = f(X) - \{f(x_0)\} \neq X-\{x_0\}$$

پس در هر حالت $X-\{x_0\}$ نامتناهی است. □

۱۲.۱.۴ تعریف: مجموعه تمام اعداد طبیعی از ۱ تا k را با $\mathbb{N}_k$ نمایش می‌دهیم یعنی $\mathbb{N}_k = \{1, 2, \dots, k\}$

۱۳.۱.۴ قضیه: برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، $\mathbb{N}_k$ متناهی است.

برهان: حکم را با استقراء ثابت می‌کنیم. اگر $n=1$ که حکم بنا به مثال ۷.۱.۴ برقرار است.

حال فرض کنیم برای هر عدد طبیعی k ، $\mathbb{N}_k$ متناهی باشد. تا حکم را برای مجموعه

$\mathbb{N}_{k+1} = \mathbb{N}_k \cup \{k+1\}$

ثابت کنیم. اگر $\mathbb{N}_{k+1}$ نامتناهی باشد بنابه قضیه قبل $\mathbb{N}_{k+1}-\{k+1\}=\mathbb{N}_k$ نیز باید نامتناهی باشد که
این خلاف فرض استقرا است. لذا $\mathbb{N}_{k+1}$ متناهی است و لذا طبق اصل استقرا حکم برای هر
$k\in\mathbb{N}$ برقرار است. □

۱۴.۱.۴ قضیه

مجموعه X متناهی است اگر و فقط اگر $X=\phi$ یا X با یک $\mathbb{N}_k$ در تناظر یک به یک باشد.

برهان: $\Leftarrow$ اگر X تهی یا با یک $\mathbb{N}_k$ در تناظر یک به یک باشد آنگاه بنابر ۱۰.۱.۴، تمرین ۷.۱.۴ و ۱۳.۱.۴
X متناهی است.

$\Rightarrow$ حال برعکس از عکس نقیض استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم که اگر $X\neq\phi$ را با هیچ یک از $\mathbb{N}_k$
ها در تناظر یک به یک نباشد آنگاه نامتناهی است.

چون $X\neq\phi$ لذا $\exists x_1\in X$ بطوریکه $X-\{x_1\}$ تهی نباشد (چون در غیر اینصورت با
$\mathbb{N}_1$ در تناظر یک به یک است). به همین ترتیب برای $X-\{x_1\}$، مشابه این عمل را انجام
می‌دهیم یعنی $x_2\in X-\{x_1\}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $X-\{x_1,x_2\}$ تهی نباشد. با تکرار این
عمل عنصرهای $x_1,\dots,x_k$ از X را طوری انتخاب کرده‌ایم که $X-\{x_1,\dots,x_k\}$ غیرتهی
و روشن است که x_i ها متمایزند
است. زیرا در غیر اینصورت $X=\{x_1,\dots,x_k\}$ یعنی با $\mathbb{N}_k$ در تناظر یک به یک است.
بدین ترتیب
~~[illegible]~~ یک زیرمجموعه از X چون $\{x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots\}$ موجود است که آن را
Y نامگذاری می‌کنیم. در اینصورت $f:Y\to Y-\{x_1\}$ را با ضابطه تعریف می‌کنیم

$$f(x_k)=x_{k+1}$$

نشان می‌دهیم که f یک تناظر یک به یک است

خوش تعریفی و یک به یکی

$$x_t=x_s \Leftrightarrow x_{t+1}=x_{s+1} \Leftrightarrow f(x_t)=f(x_s)$$

$$\forall\, x_t\in Y-\{x_1\} \Rightarrow f(x_{t-1})=x_t$$

پوشا است

بنابر ۸.۱.۴ لذا Y نامتناهی است و درنتیجه X نیز نامتناهی خواهد بود.

۲-۴ مجموعه‌های شمارا و ناشمارا

۱.۲.۴ تعریف (دو مجموعه هم‌عدد (هم‌توان)): دو مجموعه X و Y را هم‌عدد (هم‌توان) گوییم و می‌نویسیم $X \sim Y$ هرگاه تناظری یک‌به‌یک بین X و Y موجود باشد. یعنی تابعی یک به یک و پوشا مانند $f: X \to Y$ موجود باشد.

۲.۲.۴ قضیه: فرض کنیم A مجموعه‌ای از مجموعه‌ها باشد. رابطه R را روی A به صورت زیر تعریف می‌کنیم برای هر دو عضو X و Y از A

$$X R Y \iff X \sim Y \quad (X \text{ و } Y \text{ هم‌عدد باشند})$$

در این صورت رابطه R یک رابطه هم‌ارزی است.

برهان: ۱. انعکاسی: واضح است که هر مجموعه‌ای با خودش هم‌عدد است کافی است تابع همانی را در نظر بگیریم که هم یک به یک و هم پوشا است.

۲. فرض کنیم $X R Y$ در این صورت تابع ۱-۱ و پوشای $f: X \to Y$ موجود است. اگر f^{-1} را در نظر بگیریم $f^{-1}: Y \to X$ نیز تابع یک‌به‌یک و پوشاست لذا $Y \sim X$.

۳. فرض کنیم $X R Y$ و $Y R Z$ در این صورت

$$\underbrace{X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z}_{g \circ f} \qquad g \circ f: X \to Z$$

نیز یک تناظر یک به یک خواهد بود.

لذا R (هم‌عددی) یک رابطه هم‌ارزی روی A است. □

۳.۲.۴ مثال: فرض کنیم $(0,1)$ و $(-1,1)$ دو بازه از اعداد حقیقی باشند. در این صورت

(i) $(0,1) \sim (-1,1)$

(ii) $(-1,1) \sim \mathbb{R}$

(iii) $(0,1) \sim \mathbb{R}$ (تعدی از i و ii)

حل: (i) تابع $f: (0,1) \to (-1,1)$ با ضابطه $f(x) = 2x - 1$ یک تناظر یک‌به‌یک است.

(ii) تابع $g: (-1,1) \to \mathbb{R}$ با ضابطه $g(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$. g یک تابع یک‌به‌یک و پوشاست.

(۹۷)

۴.۲.۲ **قضیه**: مجموعه‌های X, Y, Z, W با شرط $X\cap Z=\emptyset=Y\cap W$ موجوداند $X \overset{f}{\sim} Y$ و $Z \overset{g}{\sim} W$. در اینصورت ثابت کنید $X\cup Z \sim Y\cup W$

به عبارت دیگر $f\cup g: X\cup Z \to Y\cup W$ یک تناظر یک به یک است

برهان: واضح است که چون $X\cap Z=\emptyset$ است لذا می‌توان اجتماع دو تابع f و g را تعریف کنیم

لذا داریم

$$(f\cup g)(x)=\begin{cases} f(x) & \text{اگر } x\in X \\ g(x) & \text{اگر } x\in Z \end{cases}$$

ثابت می‌کنیم که $f\cup g$ نیز یک تناظر یک به یک است. ابتدا فرض کنیم $(f\cup g)(x)=(f\cup g)(x')$ و $x,x'\in X\cup Z$. سه حالت رخ خواهد داد

حالت (i). $x,x'\in X$ در اینصورت

$$\left.\begin{matrix}(f\cup g)(x)=f(x)\\(f\cup g)(x')=f(x')\end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x)=f(x') \overset{1-1\ f}{\Downarrow} x=x'$$

حالت (ii) شبیه حالت قبل اگر $x,x'\in Z$

حالت (iii) $x\in X$ و $x'\in Z$. در این حالت

$$Y\ni f(x)=(f\cup g)(x)=(f\cup g)(x')=g(x')\in W$$

یعنی $Y\cap W\neq\emptyset$ که این تناقض است لذا حالت (iii) رخ نمی‌دهد.

بنابراین تابع $f\cup g$ یک به یک است. از طرفی فرض کنیم $t\in Y\cup W$ چون Y و W

$\cancel{R_{f\cup g}=\{(f\cup g)(x) \mid x\in X\cup Z\}=\{(f\cup g)(x) \mid x\in X \vee x\in Z\}}$

اشتراکی ندارند لذا دو حالت رخ می‌دهد $t\in Y$ یا $t\in W$

حالت (1)

$$t\in Y \xrightarrow[\text{onto}]{f} \exists x\in X;\ f(x)=t$$
$$\Downarrow$$
$$(f\cup g)(x)=f(x)=t \Rightarrow \text{پوشاست } f\cup g$$

حالت (ii) $t\in W \xrightarrow[\text{onto}]{g} \exists x\in Z,\ g(x)=t$

$$\Downarrow$$
$$(f\cup g)(x)=g(x)=t$$

یعنی $\exists x\in Z\cup X$ به طوری که $(f\cup g)(x)=t$. پس $f\cup g$ پوشاست $\square$

۵.۲.۳ قضیه: فرض کنیم X، Y، Z و W مجموعه‌هایی با شرط $Y \sim X$ و $W \sim Z$ باشند در این صورت $X\times Z \sim Y\times W$.

برهان: فرض کنیم $f: X \xrightarrow[onto]{1-1} Y$ و $g: Z \xrightarrow[onto]{1-1} W$ تابع $f\times g: X\times Z \to Y\times W$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall (x,z)\in X\times Z;\quad (f\times g)(x,z) = (f(x), g(z))$$

ثابت می‌کنیم $f\times g$ یک تناظر یک‌به‌یک است.

ابتدا خوش تعریفی و یک‌به‌یکی: فرض کنیم $(x,z)=(x',z') \iff$

$$\begin{cases} x=x' \iff f(x)=f(x') \\ z=z' \iff g(z)=g(z') \end{cases} \iff (f(x),g(z))=(f(x'),g(z')) \iff (f\times g)(x,z)=(f\times g)(x',z').$$

اکنون نشان می‌دهیم که $f\times g$ پوشا نیز هست. فرض کنیم (y,w) عضو دلخواهی از $Y\times W$ باشد

$$\begin{aligned} y\in Y &\xrightarrow[onto]{f} \exists x\in X;\ f(x)=y \\ w\in W &\xrightarrow[onto]{g} \exists z\in Z,\ g(z)=w \end{aligned} \Rightarrow \exists (x,z)\in X\times Z,\ (f\times g)(x,z)=(f(x),g(z)) = (y,w)$$

یعنی $f\times g$ پوشا است. □

۶.۲.۳ تعریف: مجموعه X را شمارای نامتناهی گوییم هرگاه X با $\mathbb{N}$ هم‌عدد ($X\sim \mathbb{N}$) باشد. مجموعه شمارا را مجموعه‌ای است که یا متناهی باشد یا شمارای نامتناهی باشد.

۷.۲.۳ قضیه

هر زیرمجموعه نامتناهی از یک مجموعه شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

برهان: فرض کنیم $X=\{x_1,x_2,\dots\}$ یک مجموعه شمارای نامتناهی باشد، و Y یک زیرمجموعه نامتناهی از X باشد. همچنین فرض کنید n_1 کوچکترین اندیسی باشد که $x_{n_1}\in Y$. (طبق اصل خوش ترتیبی مقدور است). حال مجموعه $Y-\{x_{n_1}\}$ را در نظر بگیریم که چون Y نامتناهی است، غیرتهی است. اکنون فرض کنید n_2 کوچکترین اندیسی باشد که $x_{n_2}\in Y-\{x_{n_1}\}$. به همین ترتیب مجموعه $Y-\{x_{n_1},x_{n_2}\}$ را در نظر بگیریم و همین روند را ادامه دهیم... یعنی n_k کوچکترین

با توجه به روند پیدا کردن n_iها روشن است که $n_1<n_2$

اندیس باشد که $x_{n_k} \in Y - \{x_{n_1}, \dots, x_{n_{k-1}}\}$. لذا برای هر $k \in \mathbb{N}$، x_{n_k} موجود است و منحصر به فرد. بدین ترتیب $f: \mathbb{N} \to Y$ را با ضابطه $f(k) = x_{n_k}$ در نظر می‌گیریم که یک تناظر یک به یک است.
لذا Y شمارای نامتناهی است

حذف تعریفی به خاطر خوانا بیدا کردن x_{n_k} ها بدیهی است اکنون نشان می‌دهیم f یک به یک است برای
این منظور فرض کنیم

~~$t \neq s \Rightarrow$~~ ~~حذف تعریفی~~

$$t \neq s \overset{?}{\Rightarrow} f(t) \neq f(s)$$

$$t < s \Rightarrow n_t < n_s \Rightarrow x_{n_t} \neq x_{n_s} \Rightarrow f(t) \neq f(s)$$

۸.۲.۴ نتیجه: هر زیرمجموعه یک مجموعه شمارا، شمارا است.

برهان: فرض کنیم X یک مجموعه شمارا و Y یک زیرمجموعه آن باشد. چون X شمارا است پس یا متناهی است یا شمارای نامتناهی. اگر X متناهی باشد بنابر ۸.۱.۴ (ii) Y نیز متناهی است. اگر X شمارای نامتناهی باشد بنابر قضیه قبل Y نیز شمارای نامتناهی است. به هر حال در هر دو صورت Y شمارا است. $\blacksquare$

۹.۲.۴ قضیه: فرض کنیم X یک مجموعه شمارای نامتناهی و Y یک مجموعه متناهی باشد. در این صورت $X \cup Y$ شمارای نامتناهی است.

برهان: چون X شمارای نامتناهی است پس $f: \mathbb{N} \to X$ یک تناظر یک به یک موجود است. اگر قرار دهیم $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$ و $Y \cap X = \emptyset$ تابع $g: \mathbb{N} \to Y \cup X$ را با ضابطه

اگر $Y \cap X \neq \emptyset$ آنگاه $Y' = Y - Y \cap X$ متناهی

$$g(i) = \begin{cases} y_i & 1 \le i \le k \\ f(i-k) & i > k \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. اکنون نشان می‌دهیم g یک تناظر یک به یک است.

$$g(1) = 1 \quad g(2) = 2 \quad \dots \quad g(k) = k, \quad g(k+1) = f(1) = x_1, \dots$$

$$\forall h \in Y \cap X \begin{cases} h \in Y \to \exists i;\ h = y_i \Rightarrow g(i) = y_i \\ h \in X \to \exists i;\ h = x_i \Rightarrow f(i-k) = x_{i-k} \end{cases}$$

پس g پوشاست.

اکنون فرض کنیم $g(m) = g(n)$، $1 \le m, n \le k$ یا $m, n > k$ در این حالت حکم بدیهی است

حالت آخر $m \le k$، $n > k$ در این صورت

$$g(m) = y_m$$

$$g(n) = f(n-k) = x_{n-k} \Rightarrow y_m = x_{n-k}$$

اما چون $X \cap Y = \emptyset$ این حالت امکان پذیر نیست. $\square$

۳.۲.۱۰ قضیه: اجتماع دو مجموعه‌ی شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

برهان: فرض کنیم A و B دو مجموعه‌ی شمارای نامتناهی باشند نشان می‌دهیم در هر دو حالت زیر $A\cup B$ شمارای نامتناهی است.

حالت (i). $A\cap B=\phi$. چون $A\sim\mathbb{N}$ و $\mathbb{N}\simeq\mathbb{N}_o$ پس $A\sim\mathbb{N}_o$ و به همین صورت $B\sim\mathbb{N}_e$ لذا $A\cup B\sim\mathbb{N}_e\cup\mathbb{N}_o=\mathbb{N}$ یعنی $A\cup B$ شمارای نامتناهی است.

حالت (ii). $A\cap B\neq\phi$. قرار می‌دهیم $C=A-B$ در این صورت $A\cup C=A\cup B$ و $A\cap C=\phi$ و $C\subseteq B$ بنابه ۳.۲.۸ C یا متناهی است یا شمارای نامتناهی که در هر صورت بنابه ۳.۲.۹ یا حالت (i). حکم برقرار است. □

۳.۲.۱۱ نتیجه: فرض کنیم $A_1,\dots,A_n$ مجموعه‌های شمارای نامتناهی باشند. در این صورت $\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ نیز شمارای نامتناهی است.

برهان: قضیه‌ی قبل و استقرا. □

۳.۲.۱۲ مثال: $\mathbb{Z}$ شمارای نامتناهی است.

تابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ را با ضابطه‌ی
$$f(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & \text{اگر } n \text{ زوج}\\ -\frac{n-1}{2} & \text{اگر } n \text{ فرد}\end{cases}$$
در نظر بگیرید تناظر یک‌به‌یک است.

۳.۲.۱۳ قضیه: مجموعه‌ی $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ شمارای نامتناهی است.

برهان: تابع $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ با ضابطه‌ی $f(m,n)=2^m\cdot 3^n$ یک تابع یک‌به‌یک است لذا $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\subseteq\mathbb{N}$. یعنی $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ ~~شمارای نامتناهی~~ نامتناهی است پس بنابه ۳.۲.۷ شمارای نامتناهی است لذا $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ هم شمارای نامتناهی است.

۳.۲.۱۴ قضیه: فرض کنیم $\{X_\gamma\mid\gamma\in\Gamma\}$ و $\{Y_\gamma\mid\gamma\in\Gamma\}$ دو خانواده از مجموعه‌های از هم جدا باشند و برای هر $\gamma\in\Gamma$ داشته باشیم $X_\gamma\sim Y_\gamma$ در این صورت
$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma\sim\bigcup_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma .$$

برهان: برای هر $\gamma \in \Gamma$ فرض کنیم $f_\gamma : X_\gamma \sim Y_\gamma$ اکنون f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$f : \bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \to \bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$ با ضابطه‌ی $f(x) =$

$$x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \to \exists X_\gamma , x \in X_\gamma \Rightarrow f(x) = f_\gamma(x)$$

چون f_γ ها تناظر یک به یک هستند و X_γ ها از هم جدا هستند، به راحتی دیده می‌شود که f نیز یک تناظر یک به یک است.

۱۵.۲.۴ قضیه: برای هر $k \in \mathbb{N}$، فرض کنیم A_k یک مجموعه‌ی شمارای نامتناهی باشد، به طوری که برای هر $j \neq k$ و شرط $A_j \cap A_k = \emptyset$ صدق می‌کند. در این صورت $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ شمارای نامتناهی است.

برهان: برای هر $k \in \mathbb{N}$ تابع $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \{k\}$ را با ضابطه‌ی $f_k(j) = (j,k)$ تعریف می‌کنیم. واضح است که f_k یک تناظر یک به یک است. لذا $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \{k\}$. از آنجایی که A_k یک مجموعه‌ی شمارای نامتناهی است لذا $A_k \sim \mathbb{N}$ و به دلیل تعدی داریم $A_k \sim \mathbb{N} \times \{k\}$ اکنون $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \sim \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\mathbb{N} \times \{k\})$. اما $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\mathbb{N} \times \{k\}) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ که مجموعه‌ای شمارای نامتناهی است بنابراین $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ یک مجموعه‌ی شمارای نامتناهی است. □

۱۶.۲.۴ مثال: $\mathbb{Q}$ مجموعه‌ی تمام اعداد گویا، شمارای نامتناهی است.

حل: هر عدد گویا را با $\frac{p}{q}$ که در آن $p \in \mathbb{Z}$، $q \in \mathbb{N}$ و $(p,q) = 1$ نمایش می‌دهیم. همچنین فرض کنیم $\mathbb{Q}^+$ مجموعه‌ی تمام اعداد گویای مثبت و $\mathbb{Q}^-$ همه اعداد گویای منفی باشد در این صورت

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$$

همچنین بدیهی است که $\mathbb{Q}^+ \sim \mathbb{Q}^-$. اکنون برای اینکه نشان دهیم $\mathbb{Q}$ شمارای نامتناهی است کافی است نشان دهیم که $\mathbb{Q}^+$ شمارای نامتناهی است. برای این منظور تابع $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ را با ضابطه‌ی $f(\frac{p}{q}) = (p,q)$ تعریف می‌کنیم، خوش‌تعریفی بدیهی است. f یک به یک است لذا

(۷۳) $\mathbb{Q}^+ \sim f(\mathbb{Q}^+) \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$f(\mathbb{Q}^+)$ یک زیرمجموعه نامتناهی از مجموعه شمارای نامتناهی $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ است لذا $f(\mathbb{Q}^+)$ شمارای نامتناهی است
یعنی $\mathbb{Q}^+$ و در نتیجه $\mathbb{Q}$ شمارای نامتناهی است □

۱۷.۲.۴ قضیه: هر مجموعه نامتناهی شامل یک زیرمجموعه شمارای نامتناهی است.

برهان: فرض کنیم X یک مجموعه نامتناهی باشد. چون $X \neq \emptyset$ می‌توان عضوی از X مثل x_1 انتخاب نمود. حال عضوی از $X-\{x_1\}$ انتخاب کرده و آن را x_2 نام می‌نامیم. با تکرار این عمل $x_1, x_2, \dots, x_k$ را بدست می‌آوریم و چون X نامتناهی است در هر مرحله می‌دانیم $X-\{x_1,\dots,x_k\}$ غیرتهی است. همه x_k های که به این صورت بدست می‌آیند را با نماد $\{x_k \mid k\in\mathbb{N}\}=A$ که یک زیرمجموعه شمارای نامتناهی از X است می‌سازیم در واقع $A \sim \mathbb{N}$ ($x_k \to k$). بنابراین حکم بدست می‌آید □.

۱۸.۲.۴ تعریف: مجموعه X را ناشمارا گوئیم هرگاه شمارا نباشد.

۱۹.۲.۴ قضیه: بازه باز $(0,1)$ از اعداد حقیقی، یک مجموعه ناشمارا است.

برهان: ابتدا هر x که $0<x<1$ را با بسط اعشاری آن به صورت $0/x_1x_2x_3\dots$ نمایش می‌دهیم. مثلاً $\frac{1}{3} = 0/333\dots$

اما اگر مثلاً $0/25000\dots = \frac{1}{4}$ برای اینکه یک نمایش اعشاری نامتناهی داشته باشد ~~و صفرها را ۹ می‌گذاریم یعنی ها را به ۹ تبدیل می‌کنیم~~ $\frac{1}{4} = 0/24999\dots$. به این ترتیب قرارداد می‌کنیم که دو عدد در فاصله $(0,1)$ مساوی هستند اگر و فقط اگر رقم‌های متناظر بسط اعشاری آنها یکی باشد. و اگر فقط در یک رقم اعشار با هم متفاوت باشند آن دو عدد متفاوت هستند. یعنی اگر $x = 0/x_1x_2x_3\dots$ و $y = 0/y_1y_2\dots$ مثلاً در رقم kام متفاوت باشند $x_k \neq y_k$ آنگاه $x \neq y$.

اکنون با برهان خلف فرض کنیم $(0,1)$ شمارا باشد لذا تابعی ۱-۱ و پوشا چون
$f: \mathbb{N} \longrightarrow (0,1)$
می‌بایست موجود باشد لذا فرض کنیم

$f(1) = 0/a_{11}a_{12}a_{13}\dots$

$f(2) = 0/a_{21}a_{22}a_{23}\dots$

$\vdots$

$f(k) = 0/a_{k1}a_{k2}a_{k3}\dots$

$\vdots$

و در آن هر $a_{ij} \in \{0,1,2,\dots,9\}$. اکنون عددی چون $z \in (0,1)$ چنان می‌سازیم که با هیچ $f(k)$ ای برابر نباشد. به عبارت دیگر اگر چنین z ای بیابیم بدان مفهوم است که f پوشا نیست و این تناقض به جا از فرض خلف است که انجام داده‌ایم.

عدد $z = 0/z_1z_2z_3\dots$ را چنین تعریف می‌کنیم

برای هر k، اگر $a_{kk} \neq 5$ قرار می‌دهیم $z_k = 5$ و اگر $a_{kk} = 5$ آنگاه قرار می‌دهیم $z_k = 1$

لذا z با هیچ یک از $f(k)$ها برابر نیست زیرا در رقم z_k با هم متفاوت هستند.

$z_1 \neq a_{11} \Rightarrow z_1 \neq f(1)$

$z_2 \neq a_{22} \Rightarrow z_2 \neq f(2)$

$\vdots$

$z_k \neq a_{kk} \Rightarrow z_k \neq f(k)$ $\square$