بنابراین $V=W_1+W_2$ اما $p(x)=1$ تشکیل یک پایه برای W_1 می‌دهد لذا چون $W_1 \cap W_2=\{0\}$ پس $P_n(x)=W_1 \oplus W_2$. بنابراین با توجه به نتیجه قبل.

$$\dim W_2 = \dim(P_n(F)) - \dim(W_1) = (n+1)-1 = n.$$

فصل دوم. تبدیلهای خطی و ماتریسها

linear transformations and matrices

تعریف: فرض کنید V و W دو فضای برداری روی میدان F باشند. تابع $T: V \longrightarrow W$ یک تبدیل خطی خوانده می‌شود هرگاه، به‌ازای هر $x, y \in V$ و $c \in F$ داشته باشیم

(a) - $T(x+y) = T(x) + T(y)$

(b) - $T(cx) = c\,T(x)$.

تمرین: به راحتی می‌توان احکام زیر را تحقیق کرد.

۱. اگر T تبدیل خطی باشد آنگاه $T(0)=0$.

۲- T تبدیل خطی است اگر و تنها اگر $T(ax+y) = aT(x)+T(y)$ برای هر $x, y \in V$ و $a \in F$.

۳- T تبدیل خطی است اگر و تنها اگر برای $x_1, \dots, x_n \in V$ و $a_1, \dots, a_n \in F$ ، داشته باشیم

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i)$$

معمولاً اگر بخواهیم چک کنیم که T یک تبدیل خطی است کافی است که شرط (۲) را چک کنیم.

مثال:

۱- تبدیل خطی همانی (identity)

$1_V : V \longrightarrow V$ by $1_V(x) = x \quad \forall x \in V$

۲- تبدیل خطی صفر

$T_0 : V \longrightarrow W$ by $T_0(x) = 0 \quad \forall x \in V$.

۳- تعریف کنید $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ توسط $T(a_1, a_2) = (2a_1 + a_2, a_1)$

$x, y \in \mathbb{R}^2$, $x = (b_1, b_2)$, $y = (d_1, d_2)$.

$cx + y = (cb_1 + d_1, cb_2 + d_2) \Longrightarrow$

$T(cx+y) = (2(cb_1+d_1) + cb_2 + d_2,\ cb_1 + d_1),$

$\Rightarrow \cancel{T(cx+y) =}$

$cT(x) + T(y) = c(2b_1 + b_2,\ b_1) + (2d_1 + d_2,\ d_1)$

$= (2cb_1 + cb_2 + 2d_1 + d_2,\ cb_1 + d_1)$

$= (2(cb_1 + d_1) + cb_2 + d_2,\ cb_1 + d_1)$

بنابراین T خطی است.

تعریف: فرض کنید V یک فضای برداری و W_1 یک زیرفضای V. یک تابع $T: V \to V$ یک پروژکشن (تصویرگر) روی W_1 نامیده می‌شود اگر

(a) - یک زیرفضای W_2 وجود داشته باشد به طوری که $V = W_1 \oplus W_2$.

(b) - اگر $x = x_1 + x_2$ جایی که $x_1 \in W_1$ و $x_2 \in W_2$ آنگاه داشته باشیم که $T(x) = x_1$.

تمرین: نشان دهید که T یک تبدیل خطی است و $W_1 = \underbrace{\{x : T(x) = x\}}_{A}$.

$x = x_1 + x_2$

$y = y_1 + y_2$

$cx + y = \underbrace{cx_1 + y_1}_{\in W_1} + \underbrace{cx_2 + y_2}_{\in W_2} \to T(cx+y) = cx_1 + y_1 = cT(x) + T(y)$

ابتدا نشان دهیم که $W_1 \subseteq A$

$x \in W_1 \Rightarrow x = x + 0 \Rightarrow T(x) = x \Rightarrow x \in A$

اثبات تساوی زیرا $A \subseteq W_1$

$x \in V \to x = x_1 + x_2,\ x \in A \to T(x) = x \Rightarrow$

$T(x) = x_1 = x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x = x_1 \in W_1.$

تعریف: فرض کنید V و W دو فضای برداری باشند. همچنین فرض کنید $T: V \to W$ یک تبدیل خطی باشد. فضای پوچ یا null space یا kernel T را با $N(T)$ نشان می‌دهیم و عبارت است از

$N(T) = \{x \in V \mid T(x) = 0\}.$

همچنین تعریف می‌کنیم برد یا تصویر T (range) را با $R(T)$ نشان می‌دهیم و عبارت است از

$R(T) = \{T(x) \mid x \in V\}$

مثال: اگر $T: V \to W$ را تبدیل همانی در نظر بگیریم در این صورت روشن است که

$N(I) = \{0\},\quad R(I) = V$

اگر $T = T_0$ آنگاه

$N(T_0) = V,\quad R(T_0) = \{0\}.$

Scanned with CamScanner

مثال: 23 فرض کنید $T: R^3 \to R^2$ توسط $T(a_1,a_2,a_3)=(a_1-a_2, 2a_3)$. می‌توان دید که

$$N(T)=\{(a,a,0): a\in R\} \quad \text{و} \quad R(T)=R^2$$

$$T(a_1,a_2,a_3)=(0,0) \Rightarrow (a_1-a_2, 2a_3)=(0,0) \Rightarrow a_3=0,\ a_1=a_2$$

$$\Rightarrow N(T)=\{(a,a,0) : a\in R\}$$

$$(y_1,y_2)\in R^2 \Rightarrow (y_1-1, -1, \tfrac{y_2}{2})\in R^3$$

$$T(y_1-1, -1, \tfrac{y_2}{2})=(y_1,y_2) \Rightarrow R(T)=R^2$$

2.1 قضیه: فرض کنید V یک فضای برداری و W_1 یک زیرفضای V باشد. در این صورت اگر T یک تصویر روی W_1 باشد و W_2 آن زیرفضایی از V باشد که در تعریف تصویر آمده، آنگاه

$$W_1=R(T),\quad W_2=N(T).$$

برهان: همانطور که دیدیم

$$W_1=\{x: T(x)=x\}$$

بنابراین $W_1\subseteq R(T)$. حال اگر $x\in R(T)$ در این صورت

$$\exists y\in V;\ T(y)=x$$

لذا $y=y_1+y_2$ ($y_1\in W_1$, $y_2\in W_2$) بنابراین

$$T(y)=y_1=x \to x\in W_1 \Rightarrow W_1=R(T).$$

با توجه به تعریف T: $W_2\subseteq N(T)$

$$x\in W_2 \to x=0+x \to T(x)=0 \to x\in N(T)$$

حال فرض کنید

$$x\in N(T) \to x=x_1+x_2,\ x_1\in W_1,\ x_2\in W_2.$$

$$0=T(x)=x_1 \to x_1=0 \to x=x_2\in W_2 \to N(T)\subseteq W_2. \blacksquare$$

با توجه به این قضیه روشن است که اگر W_2 به طور منحصربه‌فرد توسط تصویر T روی W_1 روشن می‌شود.

2.2 قضیه: فرض کنید V و W دو فضای برداری و $T: V \to W$ یک تبدیل خطی باشد. در این صورت $N(T)$ و $R(T)$ زیرفضاهایی از V و W هستند.

برهان: ما به ترتیب صفرهای V و W را با 0_V و 0_W نشان می‌دهیم. می‌توان دید چون
$T(0_V)=0_W \Rightarrow 0_V \in N(T)$.
$x,y \in N(T),\ c\in F \Rightarrow T(x+y)=T(x)+T(y)=0_W+0_W=0_W \Rightarrow$
$x+y\in N(T)$.
$T(cx)=cT(x)=c.0_W=0_W \Rightarrow cx\in N(T) \Rightarrow N(T)$
یک زیرفضای V است.
$T(0_V)=0_W \to 0_W\in R(T)$. $x,y\in R(T) \to \exists\, v,w\in V;$
$T(v)=x \quad T(w)=y \Rightarrow T(v+w)=T(v)+T(w)=x+y \Rightarrow$
$x+y\in R(T)$.
$T(cv)=cT(v)=cx \Rightarrow cx\in R(T). \Rightarrow R(T)$ is a subspace
از W. ∎

تعریف: فرض کنید V و W دو فضای برداری باشند و فرض کنید $T: V\to W$ یک تبدیل خطی باشد. اگر $N(T)$ و $R(T)$ دارای بعد متناهی باشند، تعریف می‌کنیم پوچی T را بعد فضای پوچ T و آن را با $nullity(T)$ و رتبه T $(rank\ T)$ را با $rank\ T$ نشان می‌دهیم و برابر است با بعد $range(T)$.

2.3 قضیه: فرض کنید V و W دو فضای برداری و $T: V\to W$ یک تبدیل خطی. اگر V دارای بعد متناهی باشد آنگاه $nullity(T)+rank\ T=\dim V$.

برهان: فرض کنیم $\dim V=n$ و $\{x_1,\dots,x_k\}$ یک پایه برای $N(T)$ باشد. با توجه به یکی از قضایا می‌توان این را توسیع به یک پایه برای V کرد بنابراین فرض کنید $\{x_1,\dots,x_n\}$ یک پایه برای V باشد. نشان می‌دهیم که $\{T(x_{k+1}),\dots,T(x_n)\}$ یک پایه برای $R(T)$ است. بنابراین ابتدا نشان می‌دهیم که این مجموعه یک مولد است سپس نشان می‌دهیم که مستقل خطی هستند.

$y\in R(T) \Rightarrow \exists x\in V;\ T(x)=y$

$x=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \to T(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i)=\sum_{i=k+1}^{n} a_i T(x_i)\in span(S$

حال اگر $\sum_{i=k+1}^{n} b_i T(x_i)=0 \Rightarrow T\left(\sum_{i=k+1}^{n} b_i x_i\right)=0$

$\sum_{i=k+1}^{n} b_i x_i\in N(T) \Rightarrow \sum_{i=k+1}^{n} b_i x_i=\sum_{i=1}^{k} c_i x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}(-c_i)x_i+\sum_{i=k+1}^{n} b_i x_i=0$

Scanned with CamScanner

اما مجموعه استقلال خطی داشت. عناصر پایه V باید $b_i = 0$ $\forall i$. بنابراین T یک به یک است. ■

2.4 نتیجه: فرض کنید V و W دو فضای برداری. و فرض کنید $T: V \to W$ یک تبدیل خطی باشد. اگر V دارای پایه $\beta = \{x_1, \ldots, x_n\}$ باشد آنگاه

$$R(T) = \text{span}\{T(x_1), \ldots, T(x_n)\}$$

برهان: بدیهی است ■

مثال: تبدیل خطی $T: P_2(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$T(f) = \begin{pmatrix} f(1)-f(2) & 0 \\ 0 & f(0) \end{pmatrix}$$

چون $\beta = \{1, x, x^2\}$ یک پایه برای $P_2(\mathbb{R})$ است لذا

$$R(T) = \text{span}(T(\beta)) = \text{span}(\{T(1), T(x), T(x^2)\})$$

$$= \text{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

$$= \text{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right).$$

بنابراین به این ترتیب یک پایه برای $R(T)$ پیدا کردیم لذا بعد 2 بنابراین

$\text{rank}(T) = 2$ $\quad$ $\text{nullity}(T) = 1$.

2.5 قضیه: فرض کنید V و W دو فضای برداری و فرض کنید $T: V \to W$ یک تبدیل خطی. در این صورت T یک به یک است اگر و تنها اگر $N(T) = \{0\}$.

برهان: فرض کنید T یک به یک و $x \in N(T)$ ⇐

$$T(x) = 0 = T(0) \overset{1-1}{\Longrightarrow} x = 0$$

$$\Rightarrow N(T) = \{0\}$$

حال فرض کنید $N(T) = \{0\}$. و فرض کنید که مثلاً

$$T(x) = T(y) \Rightarrow T(x-y) = 0 \to x-y \in N(T) = \{0\} \Rightarrow x = y \Rightarrow T \text{ 1-1}.$$

■

2.6 قضیه: فرض کنید V و W دو فضای برداری با بعدهای متناهی و مساوی باشند و فرض کنید $T: V \to W$ یک تبدیل خطی باشد. در این صورت T یک به یک است اگر و تنها اگر T پوشا باشد.

برهان: اولاً می‌دانیم که $nullity(T) + rank(T) = dim(V)$

اما می‌دانیم که T یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر $nullity(T)=0 \iff rank\,T = dim\,V$

$rank\,T = dim\,W$ اگر و تنها اگر $dim(R(T)) = dim\,W$. اما چون $R(T)$ یک زیرفضای W است می‌دانیم که اگر یک فضا و زیرفضا بعدشان مساوی باشند باید زیرفضا مساوی کل باشد. یعنی $R(T)=W$ یعنی T پوشا است. ∎

مثال: تعریف کنید $T: F^2 \to F^2$ توسط $T(a_1,a_2) = (a_2+a_1, a_1)$. به راحتی می‌توان دید که $N(T) =$

$$T(a_1,a_2)=(0,0) \to \begin{cases} a_2+a_1=0 \\ a_1=0 \end{cases} \to \begin{cases} a_1=0 \\ a_2=0 \end{cases}$$

بنابراین T یک‌به‌یک است. بنابراین بنا بر قضیه T پوشا است.

2.7 قضیه: فرض کنید V و W دو فضای برداری و $T: V \to W$ یک تبدیل خطی. آنگاه T یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر T هر مجموعهٔ مستقل خطی را به یک مجموعهٔ مستقل خطی ببرد.

برهان: فرض کنید T یک‌به‌یک باشد و $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی از V باشد. حال اگر

$$\sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i) = 0 \Rightarrow T\left(\sum a_i x_i\right) = 0 \to \sum a_i x_i = 0$$
$$\Rightarrow \forall i \quad a_i = 0$$

حال فرض کنیم برعکس $x \neq 0$ یک بردار غیرصفر از V باشد در این صورت چون $\{x\}$ مستقل خطی است لذا طبق فرض $\{T(x)\}$ نیز باید مستقل خطی باشد یعنی $T(x) \neq 0$ لذا بنابراین T یک‌به‌یک است. ∎

2.8 نتیجه: فرض کنید V و W دو فضای برداری و $T: V \to W$ یک تبدیل خطی یک‌به‌یک باشد. همچنین فرض کنیم S یک زیرمجموعهٔ V باشد. در این صورت S مستقل خطی است اگر و تنها اگر $T(S)$ یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی از W باشد.

برهان: تمرین ∎

2.9 قضیه: فرض کنید V و W دو فضای برداری و V از بعد متناهی با پایهٔ $\{x_1, \dots, x_n\}$ باشد. برای هر زیرمجموعهٔ $\{y_1, \dots, y_n\}$ از W یک تبدیل خطی حداکثر $T: V \to W$ وجود دارد به طوری که $T(x_i) = y_i$.

برهان: فرض کنید $x \in V$ دلخواه است $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ حال تعریف کنید

$$T: V \to W, \quad T(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$$

نشان می‌دهیم T خطی است. اگر $u=\sum b_i x_i$ ، $v=\sum c_i x_i$ آنگاه

$$du+v=\sum(db_i+c_i)x_i \Rightarrow T(du+v)=\sum(db_i+c_i)y_i$$
$$=d\sum b_i y_i+\sum c_i y_i$$
$$=dT(u)+T(v).$$

T منحصر به فرد است. زیرا اگر فرض کنیم $U:V\to W$ یک تبدیل خطی دیگر باشد که $U(x_i)=y_i$ آنگاه اگر $x=\sum a_i x_i \to U(x)=\sum a_i U(x_i)=\sum a_i y_i=T(x)$

$\Rightarrow T=U.$ ■

2.10 نتیجه: فرض کنید V و W دو فضای برداری و V با بعد متناهی با پایه $\{x_1,\dots,x_n\}$ باشد. اگر $U,T:V\to W$ دو تبدیل خطی باشند، بطوری که $U(x_i)=T(x_i)$ برای هر i، آنگاه $U=T$.

برهان: بدیهی است ■

مثال: $T:R^2\to R^2$ $\quad T(a_1,a_2)=(2a_2-a_1, 3a_1)$

فرض کنید که ما ثابت کرده باشیم که T خطی است همچنین اگر $U(1,2)=(3,3)$ و $U(1,1)=(1,3)$ آنگاه $U=T$. زیرا $\{(1,2),(1,1)\}$ تشکیل یک پایه برای R^2 می‌دهد.

نمایش ماتریسی یک تبدیل خطی

از این به بعد می‌خواهیم به هر تبدیل خطی یک ماتریس متناظر کنیم به عبارت دیگر نشان خواهیم داد که یک تناظر یک به یک بین ماتریسها و تبدیلهای خطی وجود دارد. اما قبل از آن نیاز به یک تعریف داریم.

تعریف: فرض کنید V یک فضای متناهی البعد باشد. یک پایه مرتب شده برای V در واقع یک پایه V است با یک ترتیب که روی مجموعه اعضای پایه قائل می‌شویم. به عبارت دیگر یک دنباله متناهی از عناصر مستقل خطی V که V را تولید می‌کنند.

مثال: مثلاً اگر $\beta=\{x_1,x_2,x_3\}$ یک پایه مرتب برای V باشد. آنگاه $\gamma=\{x_2,x_1,x_3\}$ پایه مرتب دیگری برای V است که $\gamma\neq\beta$.

برای فضای برداری F^n ما پایه $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ را پایه مرتب استاندارد برای F^n در نظر می‌گیریم.

تعریف: فرض کنید $\beta=\{x_1,\dots,x_n\}$ یک پایه مرتب برای فضای برداری V باشد. برای هر $x\in V$، تعریف می‌کنیم بردار مختصات x متناظر با β را، به صورت زیر با نماد $[x]_\beta$ نمایش می‌دهیم

$$[x]_\beta = \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} \qquad \text{جایی که} \qquad x=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

بنابراین به این ترتیب، به هر عضو V یک n تایی از فضای F^n متناظر می‌شود در واقع

$$x \longrightarrow [x]_\beta$$

در واقع می‌توان دید که این تابع یک تناظر یک به یک خواهد بود.

$$\varphi: V \longrightarrow F^n$$
$$x \to [x]_\beta$$

حال فرض کنید $T:V\to W$ یک تبدیل خطی باشد و V و W دارای بعد متناهی به ترتیب با پایه‌های مرتب

$\beta=\{x_1,\dots,x_n\}$ و $\gamma=\{y_1,\dots,y_m\}$

در این صورت روشن است که اسکالرهای $a_{ij}\in F$ $(i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n)$ وجود دارند که

$$T(x_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \quad \text{for } 1\le j\le n$$

تعریف: با استفاده از نمادگذاری بالا ماتریس $m\times n$ $A=(a_{ij})$ را ماتریس نمایش T می‌نامیم و برای اینکه نشان داده باشیم که این ماتریس نمایش از روی پایه‌های β و γ بدست آمده آن را با نماد $A=[T]_\beta^\gamma$ نیز نشان می‌دهیم. اگر V=W و β=γ آنگاه A را با $[T]_\beta$ نشان می‌دهیم.

در واقع هر ستون از این ماتریس در واقع همان مختصات (بردار) $T(x_j)$ است یعنی ستون jام این ماتریس برابر $[T(x_j)]_\gamma$ است.

از طرف دیگر دقت می‌کنیم که اگر دو تبدیل خطی $T,U:V\to W$ داشته باشیم که ماتریس نمایش آنها با هم مساوی باشند یعنی $[U]_\beta^\gamma=[T]_\beta^\gamma$ آنگاه خود T و U باید مساوی باشند زیرا با توجه به نتیجه 2.10 چون

ستون jام از ماتریس نمایش $= [T(x_j)]_\gamma=[U(x_j)]_\gamma \quad \forall j$

در نتیجه $T(x_j)=U(x_j)$ برای هر $x_j\in\beta$. لذا طبق آن نتیجه $T=U$.

مثال: فرض کنید $T: P_3(R) \to P_2(R)$، $T(f)=f'$. فرض کنید

$\beta=\{1,x,x^2,x^3\}$ و $\gamma=\{1,x,x^2\}$

به ترتیب پایه‌های مرتب برای $P_3(R)$ و $P_2(R)$ باشند در این صورت

$$T(1)=0.1+0.x+0.x^2$$
$$T(x)=1.1+0.x+0.x^2$$
$$T(x^2)=0.1+2.x+0.x^2 \quad \to \quad [T]_\beta^\gamma=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$
$$T(x^3)=0.1+0.x+3.x^2$$

مثال: فرض کنید $T: R^2 \to R^3$ توسط

$$T(a_1,a_2)=(a_1+3a_2, 0, 2a_1-4a_2)$$

فرض کنید β و γ پایه‌های استاندارد باشند در این صورت

$$T(0,1)=(3,0,-4)=3e_1+0e_2-4e_3$$
$$T(1,0)=(1,0,2)=e_1+0e_2+2e_3$$

$$[T]_\beta^\gamma=\begin{pmatrix}1&3\\0&0\\2&-4\end{pmatrix}$$

اگر $\gamma'=\{e_3,e_2,e_1\}$

$$\to \quad [T]_\beta^{\gamma'}=\begin{pmatrix}2&-4\\0&0\\1&3\end{pmatrix}$$

تعریف: فرض کنید $T,U: V\to W$ توابع دلخواهی باشند و V و W دو فضای برداری و $a\in F$.
تعریف می‌کنیم

$$T+U: V\to W, \quad (T+U)(x)=T(x)+U(x) \quad \forall x\in V.$$
$$aT: V\to W \quad (aT)(x)=aT(x) \quad \forall x\in V.$$

2.11 قضیه: فرض کنید V و W دو فضای برداری و $T,U: V\to W$ دو تبدیل خطی در این صورت برای هر $a\in F$ داریم

(a) $aT+U$ یک تبدیل خطی است.

(b) با استفاده از جمع و ضرب اسکالر بالا نشان دهید که مجموعه همه تبدیلهای خطی از V به W که با $\mathcal{L}(V,W)$ نشان داده می‌شود یک فضای برداری روی F است.

برهان: (a). فرض کنیم $x,y\in V$ و $c\in F$ در این صورت

$$\begin{aligned}(aT+U)(cx+y) &= aT(cx+y)+U(cx+y)\\ &= a(cT(x)+T(y))+cU(x)+U(y)\\ &= acT(x)+aT(y)+cU(x)+U(y)\\ &= c(aT(x)+U(x))+(aT(y)+U(y))\end{aligned}$$

(a)- $[T+U]_{\beta}^{\gamma} = [T]_{\beta}^{\gamma} + [U]_{\beta}^{\gamma}$

(b)- $[aT]_{\beta}^{\gamma} = a[T]_{\beta}^{\gamma} \quad \forall a \in F.$

برهان: نشان می دهیم که مؤلفه سطر iام وستون jام دو طرف با هم مساوی است. لذا فرض کنیم
$\beta=\{x_1,\dots,x_n\}$ و $\gamma=\{y_1,\dots,y_m\}$

در این صورت داریم
$$T(x_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \quad , \quad U(x_j)=\sum_{i=1}^{m} b_{ij}y_i$$
$$\forall\ j=1,\dots,n$$

لذا
$$(T+U)(x_j)=\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}+b_{ij})y_i$$
$$([T+U]_{\beta}^{\gamma})_{ij} = a_{ij}+b_{ij} = ([T]_{\beta}^{\gamma})_{ij} + ([U]_{\beta}^{\gamma})_{ij}$$
$$= ([T]_{\beta}^{\gamma} + [U]_{\beta}^{\gamma})_{ij}$$

قسمت (b) به روش مشابه به راحتی قابل اثبات است ■

ترکیب تبدیلهای خطی و حاصلضرب ماتریسها

اگر U و T دو تبدیل خطی از فضای برداری V به فضای برداری W باشد آنگاه ترکیب T و U را با
و از W به Z

UT نمایش می دهیم در حقیقت UT همان ترکیب UoT است.

تعریف: فرض کنید U و T دو تبدیل خطی زیر باشند

$T: V \to W$

$U: W \to Z$

تعریف می‌کنیم $UT: V \to Z$ با ضابطهٔ $(UT)(x) = U(T(x))$ برای هر $x \in V$.

قضیه 2.13: با توجه به نمادهای بالا ثابت کنید $UT: V \to Z$ یک تبدیل خطی است.

برهان: فرض کنیم $x, y \in V$ و $a \in F$ در این صورت

$$UT(ax+y) = U(T(ax+y)) = U(aT(x)+T(y))$$
$$= aU(T(x)) + U(T(y))$$
$$= a(UT)(x) + (UT)(y)$$

■

قضیه زیر چند خاصیت از ترکیب تبدیلهای خطی را بیان می‌کند.

قضیه 2.14: فرض کنید V یک فضای برداری، و $T, U_1, U_2 \in \mathcal{L}(V,V)$ ($\mathcal{L}(V)$). در این صورت

(a). $T(U_1+U_2) = TU_1 + TU_2$ و $(U_1+U_2)T = U_1T + U_2T$

(b). $T(U_1U_2) = (TU_1)U_2$

(c). $TI = IT = T$

(d). $a(U_1U_2) = (aU_1)(U_2) = U_1(aU_2) \quad \forall a \in F.$

برهان: تمرین.

$\alpha = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad \beta = \{y_1, \dots, y_m\}, \quad \gamma = \{z_1, \dots, z_p\}$

اکنون فرض کنید $T: V \to W$ و $U: W \to Z$ اند

$A = [U]_\beta^\gamma \qquad B = [T]_\alpha^\beta$ آنگاه

$$AB = [UT]_\alpha^\gamma$$

$$(UT)(x_j) = U(T(x_j)) = U\left(\sum_{k=1}^m b_{kj} y_k\right) = \sum_{k=1}^m b_{kj} U(y_k)$$
$$= \sum_{k=1}^m b_{kj}\left(\sum_{i=1}^p a_{ik} z_i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}\right) z_i$$
$$= \sum_{i=1}^p c_{ij} z_i$$

که در آن
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

بنابراین در واقع ستون jام از ماتریس حاصلضرب همان c_{ij}، $i=1, \dots, p$ است یا به عبارت دیگر مؤلفهٔ واقع در سطر iام و ستون jام همان c_{ij} است.

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$A \quad m \times n$, $B \quad n \times p$ $\to AB \quad m \times m$

بنابراین در واقع ثابت کرده‌ایم که :

2.15 قضیه : فرض کنید V و W و Z فضاهای برداری متناهی البعد به ترتیب با پایه‌های مرتب α، β، γ باشند. همچنین فرض کنید $T: V \to W$ و $U: W \to Z$ تبدیلهای خطی باشند. آنگاه داریم

$$[UT]_\alpha^\gamma = [U]_\beta^\gamma [T]_\alpha^\beta$$

برهان : ■

2.16 نتیجه : فرض کنید V یک فضای متناهی البعد با پایه مرتب β باشد و فرض کنید $T, U \in \mathcal{L}(V)$ در این صورت

$$[UT]_\beta = [U]_\beta [T]_\beta .$$

مثال : تعریف کنید $U: P_3(R) \to P_2(R)$ با $U(f) = f'$ ، $T: P_2(R) \to P_3(R)$

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

$\alpha = \{1, x, x^2, x^3\}$ پایه P_3 و $\beta = \{1, x, x^2\}$ پایه P_2

در این صورت واضح است که $UT = I$ ولی می‌توان دید با توجه به قضیه که

$$[UT]_\beta = [U]_\alpha^\beta [T]_\beta^\alpha$$

$$[U]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad [T]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$[U]_\alpha^\beta [T]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تعریف : تعریف می‌کنیم دلتای کرونکر را به صورت زیر و با نماد δ_{ij} نمایش می‌دهیم

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad I_n = (I_n)_{ij} = \delta_{ij}.$$

اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد بعضی اوقات ماتریس A را با $A = (A^1, \dots, A^n)$ نمایش می‌دهیم که A^j ستون jام ماتریس A است یعنی

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

ما ستون jام ماتریس همانی I_p را با e_j نمایش می‌دهیم یعنی

$$e_j = \begin{array}{r} \\ \\ j\text{ام} \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

با توجه به این نمادگذاری خواهیم داشت

2.17 قضیه : فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times p$ باشد در این صورت

(a) $(AB)^j = AB^j$

(b) $B^j = Be_j$

برهان: با توجه به تعریف ماتریس حاصلضرب می‌دانیم که

$$(AB)^j = \begin{pmatrix}(AB)_{1j}\\ \vdots \\ (AB)_{mj}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kj}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}b_{1j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{pmatrix} = AB^j .$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad (AB)^j = \begin{pmatrix}c_{1j}\\ c_{2j}\\ \vdots \\ c_{nj}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{1j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{pmatrix}$$

برهان (b): با توجه به (a) بدیهی است زیرا می‌توان نوشت $Be_j = (BI)^j = (B)^j$ ■

2.18 قضیه: فرض کنید V و W دو فضای برداری با بعد متناهی با پایه‌های مرتب β و γ. همچنین فرض کنید $T: V \to W$ یک تبدیل خطی در این صورت برای هر $x \in V$ داریم

$$[T(x)]_\gamma = [T]_\beta^\gamma [x]_\beta$$

برهان: فرض کنید $\beta = \{x_1, \dots, x_n\}$ و $A = [T]_\beta^\gamma$. در این صورت اگر $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

$$[x]_\beta = \begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

$$[T(x)]_\gamma = \Big[T\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\Big)\Big]_\gamma = \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i)\Big]_\gamma = \sum a_i [T(x_i)]_\gamma$$

قضیه قبل

$$= \sum \qquad [T(x_j)]_\gamma = A^j = Ae_j$$

$$\Rightarrow \quad [T(x)]_\gamma = \sum_{i=1}^{n} a_i (Ae_i) = \sum_{i=1}^{n} A(a_i e_i) = A\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = [T]_\beta^\gamma \cdot [x]_\beta .$$

در ماتریسها همواره داریم $a(AB) = (aA)B = A(aB)$. ■

مثال: فرض کنید $T(f) = f'$ ، $T: P_3(R) \to P_2(R)$

$$\beta = \{1, x, x^2, x^3\} \qquad \gamma = \{1, x, x^2\}$$

با توجه به مثال که قبلاً داشتیم

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

فرض کنید $P = P(x) = ۲ - 4x + x^2 + 3x^3$

$$T(P) = (P(x))' = -4 + 2x + 9x^2 \qquad (T(P))_\beta = \begin{pmatrix}-4\\ 2\\ 9\end{pmatrix}$$

$$[T]_\beta^\gamma [P]_\gamma = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۲\\ -4\\ 1\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\ 2\\ 9\end{pmatrix}$$

تعریف: فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ روی F باشد. نگاشت $L_A : F^n \to F^m$ با ضابطه $L_A(x) = Ax$ را نگاشت ضرب از چپ می‌نامیم.
این نگاشت خواص بسیار زیادی دارد که در زیر آنها را آورده‌ایم.

2.19 قضیه: فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ روی میدان F باشد در این صورت ضرب از چپ $L_A : F^n \to F^m$ یک تبدیل خطی است. علاوه اگر B یک ماتریس $m\times n$ دیگری باشد با خواهیم داشت.
جاییکه β و γ همان پایه‌های استاندارد هستند

(a) - $[L_A]_\beta^\gamma = A$

(b) - $L_A = L_B \Leftrightarrow A = B$

(c) - $L_{A+B} = L_A + L_B \quad \wedge , \quad L_{aA} = aL_A \quad \forall a \in F$

(d) - اگر $T: F^n \to F^m$ یک تبدیل خطی باشد آنگاه ماتریس منحصربفرد $m\times n$، C موجود است که
$T = L_C$

(e) -
اگر E یک ماتریس $n\times p$ باشد آنگاه $L_{AE} = L_A L_E$

(f) - اگر $m = n$ آنگاه $L_{I_n} = I_{F^n}$.

برهان: اینکه L_A یک تبدیل خطی است به راحتی از خواص حاصلضرب ماتریسها بدست خواهد آمد.
(a) می‌دانیم که ستون jام $[L_A]_\beta^\gamma$ برابر است با اثر L_A روی عضو jام از پایه β. بنابراین

$L_A(e_j) = Ae_j = A^j$ بنابراین ستون jام ماتریس نمایش L_A همان ستون jام A است. بنابراین $[L_A]_\beta^\gamma = A$.

(b) $L_A = L_B \Rightarrow [L_A]_\beta^\gamma = [L_B]_\beta^\gamma \Rightarrow A = B$. روشن است که اگر $A = B \Rightarrow L_A = L_B$.

(c) اثبات (c) بدیهی است.

(d). قرار می‌دهیم $C = [T]_\beta^\gamma$ در این صورت می‌دانیم با توجه به قضیه 2.18

$[T(x)]_\gamma = [T]_\beta^\gamma [x]_\beta = C.[x]_\beta = L_C(x) \quad \forall x.$
بنابراین $T = L_C$. حال اگر $\exists B$ بطوریکه $T = L_B$ آنگاه با توجه به (b) داریم $B = C$.

22 (e)- $L_{AE}(e_j) = (AE)e_j = (AE)^j = AE^j = A(Ee_j) = L_A(Ee_j)$

$= L_A(L_E(e_j)) = (L_A L_E)(e_j)$

بنابراین $L_{AE} = L_A L_E$.

(f)- چون اثر L_{I_n} و I_{F^n} روی هر عضو پایه مساوی است لذا این دو تبدیل خطی با یکدیگر مساوی‌اند

$L_{I_n}(e_j) = I_n . e_j = e_j$

$I_{F^n}(e_j) = e_j$ ■

تعریف: فرض کنید V و W دو فضای برداری و $T: V \to W$ یک تبدیل خطی. گوییم T معکوس پذیر است اگر تبدیل خطی U از $V \to W$: U موجود باشد به‌طوری که $TU = I_W$ و $UT = I_V$. در این حالت معکوس T را با T^{-1} نمایش می دهیم. به راحتی می توان دید که

(i). $(TU)^{-1} = U^{-1}T^{-1}$

(ii). $(T^{-1})^{-1} = T$

2.20 قضیه: فرض کنید V و W دو فضای برداری و $T: V \to W$ یک تبدیل خطی و T معکوس پذیر باشد. در این صورت $T^{-1}: W \to V$ نیز ~~معکوس پذیر~~ یک تبدیل خطی است.

برهان: فرض کنیم $y_1, y_2 \in W$ و $c \in F$. چون T معکوس پذیر است بنابراین یک به یک و پوشاست لذا $\exists x_1, x_2 \in V$ به طوری که $T(x_1) = y_1$ و $T(x_2) = y_2 \Rightarrow x_1 = T^{-1}(y_1)$، $x_2 = T^{-1}(y_2)$

$$T^{-1}(cy_1 + y_2) = T^{-1}(cT(x_1) + T(x_2)) = T^{-1}(T(cx_1 + x_2)) = T^{-1}T(cx_1 + x_2)$$
$$= cx_1 + x_2$$
$$= cT^{-1}(y_1) + T^{-1}(y_2). \blacksquare$$

21 قضیه: فرض کنید V و W دو فضای برداری متناهی البعد با بعد مساوی باشند. همچنین $T \in \mathcal{L}(V,W)$ گزاره های زیر معادلند:

(a) T معکوس پذیر است.

(b) T یک به یک است.

(c) T پوشاست.

برهان: با توجه به قضیه 2.6 برهان بدیهی است. ■

واضح است که معکوس ماتریس A، ماتریس B خواهد بود به طوری که $AB = BA = I$ (دقت که A یک ماتریس $n \times n$ است).

2.22 قضیه: فرض کنید V و W فضاهای برداری با بعد متناهی و پایه‌های مرتب β و γ باشند. و $T: V \to W$ یک تبدیل خطی. در اینصورت T معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $[T]_\beta^\gamma$ معکوس‌پذیر باشد. علاوه داریم $[T^{-1}]_\gamma^\beta = ([T]_\beta^\gamma)^{-1}$.

برهان: $\Leftarrow$ فرض کنیم T معکوس‌پذیر است در اینصورت T یک به یک است لذا اگر β پایه V باشد آنگاه $T(\beta)$ یک زیرمجموعه مستقل خطی از W خواهد بود. از طرف دیگر چون T پوشا نیز هست لذا

$$R(T) = \mathrm{span}(T(\beta))$$

بنابراین $T(\beta)$ یک پایه برای W است لذا $\dim W = \dim V = n$. بنابراین $[T]_\beta^\gamma$ یک ماتریس $n\times n$ است. اکنون اگر $T^{-1}: W \to V$ معکوس T باشد، خواهیم داشت

$$[TT^{-1}] = 1_V \Rightarrow I_n = [1_V]_\beta = [TT^{-1}]_\beta = [T]_\beta^\gamma [T^{-1}]_\gamma^\beta$$

به همین ترتیب می‌توان دید که $I_n = [T^{-1}]_\gamma^\beta [T]_\beta^\gamma$ بنابراین با توجه به تعریف معکوس‌پذیری در ماتریسها داریم $([T]_\beta^\gamma)^{-1} = [T^{-1}]_\gamma^\beta$. لذا $[T]_\beta^\gamma$ معکوس‌پذیر است.

($\Rightarrow$) حال به عکس فرض کنیم اگر $A = [T]_\beta^\gamma$، ماتریس B موجود است که

$AB = BA = I_n$

ما باید یک نگاشت $U: W \to V$ پیدا کنیم به طوری که $UT = 1_V$، $TU = 1_W$. تعریف می‌کنیم

$U(y_j) = \sum B_{ij} x_i$ ، $\beta = \{x_1, \dots, x_n\}$ ، $\gamma = \{y_1, \dots, y_n\}$

لذا $[U]_\gamma^\beta = B$ و

$$[UT]_\beta = [U]_\gamma^\beta [T]_\beta^\gamma = B.A = I_n = [1_V]_\beta \Rightarrow UT = 1_V$$

به همین ترتیب می‌توان دید که $TU = 1_W$. ∎

مثال: برای R^2، $P_1(R)$ پایه‌های $\beta = \{1, x\}$، $\gamma = \{e_1, e_2\}$ را انتخاب کنید همچنین فرض کنید

$T: P_1(R) \to R^2$ با ضابطه $T(a+bx) = (a, a+b)$

در اینصورت می‌توان دید که $T^{-1}(c,d) = c + (d-c)x$. ماتریسهای نمایش T و T^{-1} عبارت خواهند از:

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad [T^{-1}]_\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

می‌توان دید $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ وارون یکدیگر هستند لذا $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

2.23 نتیجه: فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ باشد. آنگاه A معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر L_A معکوس‌پذیر باشد. به علاوه $(L_A)^{-1}=L_{A^{-1}}$.

برهان: روشن است با توجه به قضیه قبل که L_A معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $[L_A]_\beta^\beta$ معکوس‌پذیر باشد. اما در قضیه 2.15 (a) دیدیم که $[L_A]_\beta=A$ بنابراین $(L_A : F^n \longrightarrow F^n)$

L_A معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر A معکوس‌پذیر باشد. همچنین با توجه به قضیه قبل

قضیه 2.15

$$A^{-1}=[L_A]_\beta^{-1}=[(L_A)^{-1}]_\beta \Rightarrow [L_A^{-1}]_\beta=A^{-1}=[L_{A^{-1}}]_\beta \Rightarrow (L_A)^{-1}=L_{A^{-1}} \quad ■$$

تعریف: دو فضای برداری V و W را ایزومورف گوییم هرگاه یک تبدیل خطی معکوس‌پذیر از $T: V\longrightarrow W$ موجود باشد. به یک چنین تبدیل خطی یک ایزومورفیسم گفته می‌شود.

2.24 قضیه: فرض کنید V و W دو فضای برداری با بعد متناهی باشند. در این صورت $V\simeq W$ اگر و تنها اگر $\dim V=\dim W$.

برهان: ابتدا فرض کنیم $V\simeq W$ و $T:V\longrightarrow W$ یک ایزومورفیسم باشد. دقیقاً مثل اثبات قضیه 2.22 می‌توان دید که $\dim V=\dim W$.

اکنون برعکس فرض کنیم $n=\dim V=\dim W$ و همچنین فرض کنیم

$\beta=\{x_1,\dots,x_n\}$ و $\gamma=\{y_1,\dots,y_n\}$

به ترتیب پایه‌هایی برای V و W باشند. اکنون تعریف می‌کنیم

$T:V\longrightarrow W$ با ضابطه $T(x_i)=y_i$

در این صورت می‌توان دید که

$$R(T)=span(T(\beta))=span(\gamma)=W$$

یعنی T پوشاست.

اما با توجه به قضیه 2.6، T یک به یک هم خواهد بود. ■

2.25 نتیجه: اگر V یک فضای برداری از بعد n باشد آنگاه $V\simeq F^n$.

2.26 قضیه: فرض کنید V و W دو فضای برداری با بعدهای متناهی n و m (به ترتیب) باشند و همچنین فرض کنید β و γ پایه‌های مرتب V و W باشند. آنگاه $\Phi: \mathcal{L}(V,W)\longrightarrow M_{m\times n}(F)$ با ضابطه‌ی $\Phi(T)=[T]_\beta^\gamma$ $(T\in\mathcal{L}(V,W))$ یک ایزومورفیسم است.

برهان: خطی بودن Φ را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم. حال نشان دهید که Φ یک به یک و پوشاست. فرض کنیم $\beta=\{x_1,\dots,x_n\}$ و $\gamma=\{y_1,\dots,y_m\}$. ابتدا نشان می‌دهیم که

$N(\Phi)=\{T_0\}$

فرض کنیم $[T]_\beta^\gamma = \Phi(T)=0$ در اینصورت $T(x_j)=0y_1+\dots+0y_m \Rightarrow T(x_j)=T_0(x_j)$ لذا چون T و T_0 روی عناصر پایه یکی است لذا $T=T_0$.

حال باید نشان دهیم که Φ برو است. فرض کنید $A\in M_{m\times n}(F)$. با توجه به یکی از قضایا می‌دانیم که $T\in \mathcal{L}(V,W)$ وجود دارد که

$$T(x_j)=\sum_{i=1}^{m} A_{ij}y_i \quad 1\le j\le n \quad \text{به طوری}$$

$$[T]_\beta^\gamma = A \Rightarrow \Phi(T)=A \Rightarrow \Phi \text{ is onto. } \blacksquare$$

2.27 . نتیجه: فرض کنیم V و W دو فضای برداری متناهی البعد به ترتیب با بعدهای n و m باشند. در اینصورت $\mathcal{L}(V,W)$ یک فضای برداری متناهی البعد با بعد mn است.

برهان: با توجه به قضیه قبل $\mathcal{L}(V,W)\cong M_{m\times n}(F)$ و با توجه به قضیه 2.24

$$\dim(\mathcal{L}(V,W))=\dim(M_{m\times n}(F))=mn. \blacksquare$$

تعریف: فرض کنید β یک پایه مرتب برای فضای برداری با بعد متناهی n روی میدان F باشد. تعریف می‌کنیم نمایش استاندارد V نسبت به β را با ϕ_β نشان می‌دهیم

$$\phi_\beta : V\to F^n, \quad x\to [x]_\beta .$$

2.28 قضیه: برای هر فضای برداری با بعد متناهی و پایه مرتب β، ϕ_β یک ایزومورفیسم است.

برهان: تمرین.

اکنون فرض کنید V یک فضای برداری با بعد n باشد و W یک فضای برداری از بعد m باشد با پایه‌های مرتب β و γ. و $T:V\to W$ یک تبدیل خطی. همچنین $L_A:F^n\to F^m$ را که در آن $A=[T]_\beta^\gamma$ در نظر بگیرید. ما می‌خواهیم نشان دهیم که به دو طریق می‌توانیم از V به F^m برسیم

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\phi_\beta"'] & W \arrow[d, "\phi_\gamma"] \\ F^n \arrow[r, "L_A"'] & F^m \end{tikzcd}$$

در واقع می‌خواهیم نشان دهیم که این دیاگرام جابه‌جایی است یعنی

$$\phi_\gamma T = L_A \phi_\beta$$

$\blacksquare$

2.29 قضیه فرض کنید $T: V \to W$ یک تبدیل خطی از فضای n بعدی V به فضای m بعدی W باشد. همچنین فرض کنید β و γ پایه‌های مرتب برای V و W باشند و همچنین فرض کنید $A = [T]_\beta^\gamma$. در این صورت

$$L_A \phi_\beta = \phi_\gamma T$$

اثبات:

$$(L_A \phi_\beta)(x) = L_A(\phi_\beta(x)) = L_A([x]_\beta) = A[x]_\beta = [T]_\beta^\gamma [x]_\beta$$

$$= [T(x)]_\gamma = \phi_\gamma(T(x)) = (\phi_\gamma T)(x). \blacksquare$$

در واقع قضیهٔ بالا یک طریقهٔ دیگر نوشتن قضیهٔ 2.18 است.

مثال:

$T: P_3(R) \to P_2(R)$ $\qquad T(f) = f'$

$\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ $\qquad \gamma = \{1, x, x^2\}$ $\qquad [T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A$

$P(x) = 2 + x - 3x^2 + 5x^3$ $\qquad \phi_\beta(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$L_A \phi_\beta(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix}$ $\qquad T(P) = 1 - 6x + 15x^2 \to \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \phi_\gamma(T(P)) = [T(P)]_\gamma$

$\phi_\gamma(T(P)) = [T(P)]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix}.$

ماتریس تبدیل مختصات:

فرض کنید V یک فضای برداری با دو پایهٔ مرتب $\beta = \{x_1, \dots, x_n\}$ و $\beta' = \{y_1, \dots, y_n\}$

مشکلی که همواره مطرح است این است که اگر $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ و همچنین x در پایهٔ β' برابر باشد با $x = \sum_{j=1}^{n} b_j y_j$

چه ارتباطی بین بردار مختصات های $[x]_\beta$ و $[x]_{\beta'}$ وجود دارد. به عبارت دیگر چه ارتباطی بین a_iها و b_jها وجود دارد. در واقع هر y_j به صورت زیر قابل نوشتن است

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$x = \sum_{j=1}^{n} b_j \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j c_{ij}\right) x_i$$

لذا چون هر عضو به صورت منحصر به فردی برحسب عناصر پایه نوشته می شود باید

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j c_{ij}$$

$$\Rightarrow [x]_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1c_{11} + b_2c_{12} + \dots + b_nc_{1n} \\ b_1c_{21} + b_2c_{22} + \dots + b_nc_{2n} \\ \vdots \\ b_1c_{n1} + b_2c_{n2} + \dots + b_nc_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots \\ c_{n1} & \dots & & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= Q \cdot [x]_{\beta'}$$

به ماتریس Q اصطلاحاً ماتریس تبدیل مختصات گفته می شود. اما می توان دید که اگر تبدیل خطی همانی روی V را در نظر بگیریم آنگاه $Q = [I_V]_{\beta'}^{\beta}$ بنابراین می توان در حالت کلی نتیجه گرفت

2.30 . فرض کنید β و β' دو پایه مرتب برای فضای متناهی البعد V باشند و همچنین فرض کنید $Q = [I_V]_{\beta'}^{\beta}$

در اینصورت

(a) . Q معکوس پذیر است .

(b) . برای هر $v \in V$ داریم
$$[v]_\beta = Q[v]_{\beta'} = [I_V]_{\beta'}^{\beta}[v]_{\beta'}$$

برهان: با توجه به قضیه 2.22 چون I_V معکوس پذیر است لذا Q نیز معکوس پذیر است. ∎

مثال: $V = R^2$ و $\beta = \{(1,1),(1,-1)\}$ و $\beta' = \{(2,4),(3,1)\}$ در اینصورت

$$(2,4) = 3(1,1) - (1,-1)$$
$$(3,1) = 2(1,1) + (1,-1) \rightarrow Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = [I]_{\beta'}^{\beta}$$

لذا مثلاً $[(2,4)]_\beta = Q \cdot [(2,4)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

نکته دیگری که وجود دارد این است که اگر $T: V \to W$ یک تبدیل خطی باشد و V دارای پایه های β و β' و W دارای پایه های γ و γ' باشد آنگاه ماتریس نمایش T را می توان در پایه های مثلاً β و γ و همچنین در پایه های β' و γ' پیدا کرد. $[T]_{\beta'}^{\gamma'}$ و $[T]_\beta^\gamma$. حال سوال این است که چه ارتباطی بین این دو ماتریس نمایش وجود دارد و به عبارت دیگر چگونه می توان از یکی به دیگری رسید .

حال اگر فرض کنیم $Q=[I_V]_{\beta'}^{\beta}$ ماتریس تبدیل پایه از β' به β و $P=[I_W]_{\gamma'}^{\gamma}$ ماتریس تبدیل پایه از γ' به γ باشد در این صورت از بخش قبل دیده ایم که

$$[v]_{\beta} = [I_V]_{\beta'}^{\beta}[v]_{\beta'} = Q[v]_{\beta'}$$

$$[T(v)]_{\gamma} = [I_W]_{\gamma'}^{\gamma}[T(v)]_{\gamma'}$$

$$[T(v)]_{\gamma'} = [T]_{\beta'}^{\gamma'}[v]_{\beta'}$$

$$[T(v)]_{\gamma} = [T]_{\beta}^{\gamma}[v]_{\beta}$$

$$\begin{tikzcd}
{[v]_{\beta'}} \arrow[r, "\text{ضرب با } {[T]_{\beta'}^{\gamma'}}"] \arrow[d, "\text{ضرب در } Q={[I_V]_{\beta'}^{\beta}}"'] & {[T(v)]_{\gamma'}} \arrow[d, "\text{ضرب در } {[I_W]_{\gamma'}^{\gamma}}=P"] \\
{[v]_{\beta}} \arrow[r, "\text{ضرب با } {[T]_{\beta}^{\gamma}}"] & {[T(v)]_{\gamma}}
\end{tikzcd}$$

$$[T(v)]_{\gamma} = [I]_{\gamma'}^{\gamma}[T(v)]_{\gamma'} = P[T(v)]_{\gamma'} = P[T]_{\beta'}^{\gamma'}[v]_{\beta'}$$

$$[T(v)]_{\gamma} = [T]_{\beta}^{\gamma}[v]_{\beta} = [T]_{\beta}^{\gamma}[I]_{\beta'}^{\beta}[v]_{\beta'}$$

$$= [T]_{\beta}^{\gamma} Q [v]_{\beta'}$$

$$\Rightarrow P[T]_{\beta'}^{\gamma'}[v]_{\beta'} = [T]_{\beta}^{\gamma} Q [v]_{\beta'} \qquad \forall v \in V \Rightarrow$$

از جمله آن عناصر پایه را اختیار کنیم آنگاه

$$P[T]_{\beta'}^{\gamma'} = [T]_{\beta}^{\gamma} Q.$$

اما چون P معکوس پذیر است می توان نوشت

$$[T]_{\beta'}^{\gamma'} = P^{-1}[T]_{\beta}^{\gamma} Q$$

2.31 - قضیه: فرض کنید $T: V \to W$ یک تبدیل خطی از فضای برداری متناهی البعد V به فضای متناهی البعد W باشد. همچنین فرض کنید β و β' دو پایه مرتب برای فضای V و γ، γ' دو پایه مرتب برای فضای W باشند در این صورت

$$[T]_{\beta'}^{\gamma'} = P^{-1}[T]_{\beta}^{\gamma} Q$$

جاییکه Q ماتریس تبدیل پایه از β' به β و P ماتریس تبدیل پایه از γ' به γ می باشد.

مثال: فرض کنید $V=R^3$ و $W=R^2$ و $T: V \to W$ توسط

$$T\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1+a_2 \\ a_1+a_2-a_3 \end{pmatrix}.$$

و فرض کنید β و γ پایه‌های استاندارد برای R^3 و R^2 باشد همچنین فرض کنید

$$\beta' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \text{ and } \gamma' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

در این صورت

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad [T]_{\beta'}^{\gamma'} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

همچنین

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

و می‌توان دید که

$$[T]_{\beta'}^{\gamma'} = P^{-1}[T]_\beta^\gamma Q.$$

2.32 نتیجه: فرض کنید $T: V \to V$ یک تبدیل خطی روی فضای متناهی البعد V باشد و β و β' دو پایه برای V در این صورت
$$[T]_{\beta'} = Q^{-1}[T]_\beta Q$$

که در آن Q ماتریس تبدیل پایه β' به β است.

تعریف: فرض کنید A و B دو ماتریس $n\times n$ با درایه‌های متعلق به میدان F باشند. ما می‌گوییم B مشابه A است اگر ماتریس معکوس‌پذیر Q موجود باشد $Q\in M_{n\times n}(F)$ به طوریکه

$$B = Q^{-1}AQ.$$

تمرین: تحقیق کنید که رابطه تشابه یک رابطه هم‌ارزی روی ماتریسها است.

بنابراین با توجه به تعریف می‌توان نتیجه را اینطور بیان کرد که $[T]_{\beta'}$ و $[T]_\beta$ مشابه هستند.