

رود {مجموعه} یک تریه آبی باشد.

1.3 تعریف: یک فضای برداری روی یک میدان F ، یک تریه آبی V است که عمل آن را به صورت جمع نشان می دهیم. هماء با یک عمل از $F \times V \rightarrow V$ که اصطلاحاً ضرب اسکالر نام دارد به طوری که شرایط زیر صدق کند.

V.1. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

V.2. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ for all $\alpha, \beta \in F$

V.3. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ $x, y \in V$

V.4. $1 \cdot x = x$

لازم به توضیح است که اثر تابع فوق بر این صورت است.
 $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$

به عناصر F اصطلاحاً اسکالر به عناصر V ، بردار گفته می شود.

بنابراین اگر بخواهیم تعریف بالا را کمی باز کرده بایسیم می توان گفت که یک فضای برداری شکل است

1- یک میدان F از اسکالرها

2- یک مجموعه V از اشیا، نام بردارها

3- یک عمل به نام جمع برداری که $(+)$ یک تریه آبی است

$+ : V \times V \rightarrow V$

$\forall x, y \in V \quad x+y \in V$

$x+y = y+x$

$(x+y)+z = x+(y+z)$

عنصر خنثی را با بردار 0 نشان می دهیم

$x+0 = 0+x = x$

$\forall x \in V, \exists -x \in V \quad x+(-x) = (-x)+x = 0$

4- یک عمل $F \times V \rightarrow V$ که به هر اسکالر $\alpha \in F$ ، بردار $x \in V$ ، بردار αx را است به نام ضرب اسکالر (V.1, V.2, V.3, V.4)

دقت می کنیم که در شرایط بالا عملها چگونه هستند (توضیح راجع به عملها را)

به طور مادی یک فضای برداری را با V نشان می دهیم. آنرا نیز به سهولت کردن میدان هم باید با F نشان می دهیم.

F نشان می دهیم

(۱.۲)

(۱) فرض کنید F یک میدان باشد و $V = F^n$ متکلی از n تایی های مرتب روی F .
 F^n روی F یک فضای برداری است.
 ۱. F^n یک توده آبل تحت عمل جمع مؤلفه ای است (تحقیق شود)

$$x = (a_1, \dots, a_n)$$

$$y = (b_1, \dots, b_n) \Rightarrow x + y = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

۲. ضرب اسکالر را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$cx = c(a_1, \dots, a_n) = (ca_1, \dots, ca_n)$$

تحقیق شود شرایط $v_1, \dots, v_4$ برقرار می باشد.

نتیجه: اگر n می توان نتیجه گرفت که هر میدان روی خودش شش یک فضای برداری می دهد.

(ii) - فضای ماتریک $m \times n$. فرض کنید F یک میدان اعداد و m, n اعداد صحیح مثبت باشند. همچنین فرض کنید $M_{m \times n}(F)$ مجموعه همه ماتریکهای $m \times n$ روی F باشد. می خواهیم نشان دهیم که تحت جمع و ضرب اسکالر زیر $M_{m \times n}(F)$ یک فضای برداری است

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

صفه از اعداد A_{ij} مؤلفه ا سطر i تم و ستون j ام
 از ماتریک A است.

دقت کنید که $M_{1 \times n}(F)$ می F^n است.

(iii) - برای هر میدان F و هر $\alpha \in F$ یک فضای برداری است که به عنوان فضای برداری **بدیهی** نامیده می شود
 ساختمان توده که بدیهی است. تعریف می کنیم
 روی هر میدان F خواهد بود.

(iv) - فضای توابع از یک مجموعه به یک میدان
 فرض کنید F یک میدان و S یک مجموعه غیر تهی است.
 $\{f, g\}$ مجموعه همه توابع از S به F

$$f, g \in V \Rightarrow (f+g)(s) = f(s) + g(s)$$

$$c \in F, f \in V; (cf)(s) = cf(s)$$

(۷,+) یک گروه آبدی است.

$$\forall s \in S \quad f(s) + g(s) = g(s) + f(s) \quad (F \text{ یک میدان است})$$

$$\Rightarrow f + g = g + f$$

۲- عمل جمع شرکتپذیر است زیرا

$$\forall s \in S \quad (f(s) + g(s)) + h(s) = f(s) + (g(s) + h(s)) \Rightarrow$$

$$(f + g) + h = f + (g + h)$$

چون عمل جمع F شرکتپذیر است

۳- عنصر خنثی 0 با جمع مندر است. به هر عنصر s اسکالر 0 از F اختصاص می دهیم.

$$\forall s \quad f(s) + 0(s) = f(s) + 0 = 0 + f(s) = 0(s) + f(s) = f(s)$$

$$\Rightarrow f + 0 = 0 + f = f$$

۴- برای هر $f \in V$ ، $(-f)$ به صورت زیر تعریف خواهد شد.

$$(-f)(s) = -(f(s))$$

بنابراین $(V, +)$ یک گروه آبدی است.

$$v.1. \quad \alpha(f + g)(s) = \alpha((f + g)(s)) = \alpha(f(s) + g(s))$$

$$= \alpha f(s) + \alpha g(s)$$

$$= (\alpha f + \alpha g)(s)$$

$$\Rightarrow \alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$$

$$v.2. \quad ((\alpha + \beta)f)(s) = (\alpha + \beta)f(s) = \alpha f(s) + \beta f(s)$$

$$= (\alpha f + \beta f)(s)$$

$$\Rightarrow (\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$$

$$v.3. \quad ((\alpha\beta)f)(s) = (\alpha\beta)f(s) = \alpha(\beta f(s)) = \alpha((\beta f)(s))$$

$$= (\alpha(\beta f))(s)$$

$$\Rightarrow (\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$$

$$v.4. \quad (1 \cdot f)(s) = 1 \cdot f(s) = f(s) \Rightarrow 1 \cdot f = f$$

جنبه حکم سازه

۱.۶ گزاره: فرض کنید F یک میدان و V یک فضای برداری روی F باشد. در این صورت احکام زیر برقرار هستند

(i) - برای هر اسکالر $\alpha \in F$ داریم

$$\alpha \cdot 0 = 0$$

(ii) - برای هر بردار $x \in V$ داریم

$$0x = 0$$

(iii) - اگر α یک اسکالر و x یک بردار باشد، $\alpha x = 0$ یا $x = 0$ یا $\alpha = 0$

(iv) - $\alpha x = x$ اگر و تنها اگر $\alpha = 1$ یا $x = 0$

اثبات:

$$\alpha 0 = \alpha(0+0) = \alpha 0 + \alpha 0 \Rightarrow \alpha 0 = 0$$

$$0x = (0+0)x = 0x + 0x \Rightarrow 0x = 0$$

(iii) - اگر $\alpha \neq 0$ حکم بدیهی است. حال فرض کنید $\alpha = 0$. بنابراین چون F یک میدان است هر عنصر مخالف معکوس دارد و معکوس معکوس همان است. بنابراین داریم

$$\alpha x = 0 \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1}0 = 0 \Rightarrow x = 0$$

(iv) - با استفاده از تعاریف و حکم (iii) سبب می آید (تحقیق شود).

$$\alpha x = x \Rightarrow \alpha x - x = x - x = 0 \Rightarrow \alpha x + (-1)x = 0 \Rightarrow (\alpha - 1)x = 0$$

$$(\alpha - 1)x = 0 \xrightarrow{\text{iii}} x = 0$$

$$\alpha = 1$$

مثال:

مثال:

(۷) - فضای توابع چند جمله ای روی میدان F $F[x]$

فرض کنیم F یک میدان و V مجموعه توابع f از F در F با ضرایب زیر

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

در اینجا $a_i \in F$. جنبه تابعی یک تابع چند جمله ای روی F می تواند دید

که همراه با جمع زیر یک فضای برداری روی F است.

۱.۹ مثال:

(i) - فرض کنید V یک فضای برداری باشد، در این صورت V زیرفضای از V است. زیر مجموعه متشکل از بردار صفر تنها، زیرفضای از V است که زیرفضای صفر یا زیرفضای بدیهی نامیده می شود.

منظور از یک زیرفضا سره (proper) از یک فضای برداری، زیرفضای است، که زیرفضای صفر باشد نه خود V .

(ii) - در F^n برای $n \geq 2$ ، مجموعه همه n تایی های $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ با شرط $x_1 = 0$ یک زیرفضا است.

(iii) - در F^n مجموعه همه n تایی ها با شرط $x_1 + x_2 = 0$ یک زیرفضا است.

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

$$\alpha X = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \quad \alpha x_1 + \alpha x_2 = \alpha(x_1 + x_2) = \alpha \cdot 0 = 0 \quad \text{if } \alpha \neq 0$$

(iv) - فضای توابع چندجهشی بر روی مدین F ، زیرفضای از فضای همه توابع از F در F است.

(v) - ماتریسهای قطری زیرفضای از $M_{n \times n}(F)$.

اگر M یک ماتریس $n \times n$ در F باشد، آنرا به هاوری قطری اصلی را $M_{11}, M_{22}, \dots, M_{nn}$ نشان دهیم. M اقطری توئیم اگر قطری عناصر $= 0$ باشد.

$$M_{ii} = 0, \quad \forall i \neq 0$$

بدیهی است که ماتریسهای قطری یک زیرفضای $M_{n \times n}(F)$ هستند.

(vi) - چندجهشیها یا رجه کوکلتید یا مسای با n .

۱.۱۰ قضیه: فرض کنید V یک فضای برداری روی F باشد در این صورت اشتراک همدسته از زیرفضاهای V ، یک زیرفضای از V است.

اثبات: فرض کنیم $W = \bigcap W_a$ اشتراک دسته زیرفضاهای W_a باشد. اولاً چون هر

W_a یک زیرفضا است، بنابراین شامل صفر است پس $0 \in W$ و نیز W نیز یک است از روی تشریح از آن $\alpha \in F, x, y \in W_a$ چون $x, y \in W_a$ برای همه a بنابراین

$$\alpha x + y \in W_a \quad \forall a \Rightarrow \alpha x + y \in W = \bigcap W_a$$

پس W یک زیرفضای از فضای برداری V است. ■

و بی به بحث از اشتراک زیرفضاهای یک فضای برداری می شود به طور مبسوطی می توان گفت که هر چقدر این اشتراک بیشتر باشد، احتمالاً این زیرفضاهای یک فضای برداری هم یک فضای برداری است.

این روشن است که اگر $\alpha \in U W_a$ آنگاه
 $x \in U W_a, \alpha \in F \Rightarrow \exists a; x \in W_a \Rightarrow \alpha x \in W_a \Rightarrow \alpha x \in U W_a$
 این شرط را می‌توان به این صورت جمع معلوم است
 $x, y \in U W_a \Rightarrow \exists a_1, x \in W_{a_1}, \exists a_2, y \in W_{a_2} \Rightarrow x+y \in U W_{a_1}$

تقریب: نشان دهیم که $W = U W_a$ یک زیرفضای برداری است. برای
 هر $I \in I$ و $k \in I$ داریم: $W_i \subseteq W_k$
 $W_j \subseteq W_k$

تعریف: فرض کنید S مجموعه‌ای از بردارها فضای برداری V باشد. **زیرفضای پدیدآمده توسط S**
 نام بردار تعریف عبارت است از اشتراک W از همه زیرفضاهای V که شامل S می‌باشند
 اگر S شامل $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ باشد، نگاه داریم W زیرفضای پدیدآمده توسط بردارها
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ می‌نامند. **span(S)**

مثال: $\text{span}(\emptyset) = \{0\}$

تعریف: بردار β از V یک ترکیب خطی بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ از V نامیده می‌شود اگر
 اسکالاری چون $c_1, \dots, c_n$ در F وجود داشته باشد به طوری که
 $\beta = c_1 \alpha_1 + \dots + c_n \alpha_n = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$

۱.۵ قضیه: زیرفضای پدیدآمده توسط یک زیرمجموعه غیرتهی که از فضای برداری V عبارت است از مجموعه
 همه ترکیبات خطی بردارهای S است.

اثبات: فرض کنیم W زیرفضای پدیدآمده توسط S باشد. با توجه به تعریف زیرفضای هر ترکیب
 خطی

$$\alpha = c_1 \alpha_1 + \dots + c_m \alpha_m$$

از بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ می‌توان در W است. بنابراین W شامل

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^m c_i \alpha_i \mid c_i \in F, \alpha_i \in S, m \in \mathbb{N} \right\}$$

است. حال می‌خواهیم نشان دهیم که L خود نیز یک زیرفضای V است که شامل S می‌دهد لذا با توجه به تعریف
 $W \subseteq L$.

اولاً L غیرتهی است زیرا 0 در L است. اگر

$$\alpha = c_1 \alpha_1 + \dots + c_m \alpha_m$$

$$\beta = c'_1 \alpha_1 + \dots + c'_n \alpha_n$$

آنگاه به ازای هر اسکالر $c \in F$

$$c\alpha + \beta = \sum_{i=1}^m (cc_i) \alpha_i + \sum_{j=1}^n c'_j \alpha_j$$

که یک زیرفضا است

مثال: صلیق تشریف

$$\text{span}(\phi) = \cap S$$

کسی زیرفضای V
 $\phi \subseteq S$

حدین ϕ زیر مجموعه معدوم های است لذا حد زیرفضای از V در این است که ϕ از طرف
دستر $\{0\}$ کسی زیرفضای V است بنابراین $\text{span}(\phi) = \cap S = \{0\}$

تعریف: فرض کنید S_1 و S_2 دو زیر مجموعه غیر تهی از فضای برداری V باشند. در این صورت مجموع S_1 و S_2 را با نماد $S_1 + S_2$ نشان می دهیم و عبارت است از:

$$\{x+y \mid x \in S_1, y \in S_2\}$$

همین ترتیب می توان مجموع هر تعداد دسته ای از زیر مجموعه های غیر تهی V مانند $S_1, S_2, \dots, S_n$ را به صورت زیر تعریف نمود:

$$S_1 + \dots + S_n = \{x_1 + \dots + x_n \mid x_i \in S_i \text{ for } i=1, 2, \dots, n\}$$

۱.۲ قضیه: اگر W_1 و W_2 دو زیر فضای فضای برداری V باشند آنگاه $W_1 + W_2$ نیز یک زیر فضای V است.

برهان: چون $0 \in W_1$ و $0 \in W_2$ ، آنگاه $0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2$. بنا بر این $W_1 + W_2 \neq \emptyset$. اکنون فرض کنیم $x = x_1 + x_2 \in W_1 + W_2$ و $y = y_1 + y_2 \in W_1 + W_2$.

$$cx + y = c(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (cx_1 + y_1) + (cx_2 + y_2)$$

$$\Rightarrow cx + y \in W_1 + W_2 \quad \forall c \in F, x \in W_1 + W_2, y \in W_1 + W_2. \blacksquare$$

۱.۷ نتیجه: مجموع هر تعداد دسته ای از زیر مجموعه های یک فضای برداری، خود یک زیر فضای برداری است. اثبات: توسط استقرا روی n . $\blacksquare$

یک نوع خاص از اجتماع زیر فضاهای تقاطع بسیار مهمی در ادامه این فصل خواهد داشت که ما به صورت زیر آن را تعریف می کنیم:

تعریف: یک فضای برداری V گفته می شود که به صورت جمع مستقیم دو زیر فضای W_1 و W_2 نوشته می شود هرگاه که $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ و $V = W_1 + W_2$. این مسئله را با نماد زیر نشان می دهیم:

$$V = W_1 \oplus W_2$$

۱۱ اثبات: استنباط کنید $V = W_1 \oplus W_2$ حال فرض کنید مثلاً

$$z = x_1 + x_2$$

$$z = y_1 + y_2 \Rightarrow x_1 - y_1 = y_2 - x_2$$

$$x_1 - y_1 \in W_1$$

$$y_2 - x_2 \in W_2$$

$$x_1 = y_1 \Leftrightarrow x_1 - y_1 = 0$$

$$x_2 = y_2 \Leftrightarrow y_2 - x_2 = 0$$

مثلاً چون $\{0\} \subset W_1 \cap W_2$ بنابراین
 بنابراین هر عنصر صفر است منحصر به فردی بر حسب عناصر W_1 و W_2 نوشته شود
 اثبات: جهت عکس مشابه است. ■

رابطه خطی و استقلال خطی

تعریف: زیر مجموعه که از فضای برداری V ، وابسته خطی نامیده می شود اگر بردارها

$x_1, \dots, x_n$ در یک موجود باشد اسکالرهای $a_1, \dots, a_n$ از F که خطی آنها

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$$

صفر نباشد معبری که

ما همیشه می گیریم $x_1, \dots, x_n$ وابسته خطی هستند

همواره ای که وابسته خطی نباشد، مستقل خطی نامیده می شود

در واقع می توان گفت اگر برای $x_1, \dots, x_n$ در یک وابسته باشیم

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$$

آنگاه از آن هر $a_i = 0$ نتیجه شود.

گرنه S مستقل خطی است.

$$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

مثال:

$$x_1 = (2, -1, 4), x_2 = (1, -1, 3), x_3 = (1, 1, -1), x_4 = (1, -2, -1)$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0 \Rightarrow$$

$$(2a_1 + a_2 + a_3 + a_4, -a_1 - a_2 + a_3 - 2a_4, 4a_1 - a_2 - a_3 - a_4) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ -a_1 - a_2 + a_3 - 2a_4 = 0 \\ 4a_1 - a_2 - a_3 - a_4 = 0 \end{cases}$$

$$a_4 = 0 \Rightarrow a_3 = -1, a_2 = -3, a_1 = 2$$

سپ این بردارها وابسته خطی هستند.

مثال: در یک فضای برداری هر زیر مجموعه که شامل بردار صفر باشد، وابسته خطی است زیرا همواره

$$1 \cdot 0 = 0$$

می توان نوشت

12. هزیردیهیه تک عضوی (مخالفت $\{0\}$) مستقل خطی است زیرا اگر $S = \{x\}$

$$ax = 0 \Rightarrow a^T a x = a^T \cdot 0 = 0 \Rightarrow x = 0$$

مثال: $\{0\}$ مستقل خطی است (به اشتقای مقدم).

مثال: فرض کنید $F^2 \supseteq F$ برداری باشد و این $k-1$ مؤلفه آن مندرقیه! باشد.

در این صورت $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مستقل خطی است زیرا اگر

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ \vdots \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0 \end{cases}$$

که بدیهی است نتایج آن

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

1.9 قضیه: فرض کنید V یک فضای برداری و $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$ اگر S_1 واسه خطی باشد آنگاه S_2 نیز واسه خطی است.

اثبات: بدیهی است.

1.10 نتیجه: فرض کنید $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$ اگر S_2 مستقل خطی باشد آنگاه S_1 نیز مستقل خطی است.

اثبات: از فرض کنیم S_1 واسه خطی باشد با توجه به قضیه S_2 نیز واسه خطی است که این تناقض است.

تعریف: یک پایه برای فضای برداری V یک زیر مجموعه مستقل خطی از V است که V را تولید کند.

مثال: $\{0\}$ یک پایه برای فضای برداری $\{0\}$ است. زیرا اولاً دیدیم که $\text{span}(\{0\}) = \{0\}$ از طرف دیگر $\{0\}$ مستقل خطی است (به اشتقای مقدم).

مثال: در F^n $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ $e_1, e_2, \dots, e_n$ یک پایه برای F^n می دهد که این پایه استاندارد گفته می شود.

مثال: چند جمله ای از درجه n روی میدان F $P_n(F)$ را بنویسید. رابع است $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

یک پایه برای $F_n[x]$ است. زیرمیدانی از F در نتیجه ناشای است.

حال یک مثال نامشاه.

مثال: V رابعی توابع چند جمله ای روی میدان F در نظر بگیرید. $P(F)$ روشن است که $P(F)$ رابعی است که $P_k(x) = x^k$ آنگاه

$$\{1, x, x^2, \dots, x^k, \dots\}$$

۱۹. شکل یک به یک برای $F[x]$ خواهد بود. این دو نامتناهی است. F زیر میدان از F در نتیجه نامتناهی است. F نامتناهی است.

$$P(x) = C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n = C_0 P_0 + C_1 P_1 + \dots + C_n P_n$$

حدا این مجموعه مستقل خفای است در واقع کافی است نشان دلاهِ شود که هر زیر مجموعه مستقلی از آن مستقل خفای است. $\{P_1, \dots, P_n\}$ که در این صورت اگر

$$C_0 f_0 + C_1 f_1 + \dots + C_n f_n = 0$$

آنها در واقع بزرگان هر ۸۴۴ داریم

$$(*) \quad c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n = 0$$

اما از آنجایی که هر چند حجمی از رزق n خدا کند n هر چه دارد لذا $(+)$ برقرار است هر چه
برای هر $n = 50$ بار این که مستقل خفی است.

الکون شامی دهم که $F[x]$ می تواند دارای یک ای متناهی باشد.

توان x در $g, \dots, g_r$ مثلاً x^k باشد. این بدین است که در $f = x^{k+1}$ $k+1$ فضای تولید شده توسط $g_1, \dots, g_r$ نخواهد بود و این همانی تر انداختن است و در هند.

۱.۱۱ - **نصفه:** فرض کنید $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ یک زیر مجموعه V است. در این صورت
هم یک β برای V است. اگر تنها اثر هر بردار $\alpha \in V$ را بتوان β صورت منحصر به فردی
از بردارهای β نوشت معنی

$$y = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \text{ for unique scalars } a_1, \dots, a_n.$$

$$\begin{aligned} y &= a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \\ y &= b_1 x_1 + \dots + b_n x_n \end{aligned} \Rightarrow (a_1 - b_1)x_1 + \dots + (a_n - b_n)x_n = 0$$

حیون: ۱۶۰۰ متغیر خفیه هستند

$$\forall i: a_i - b_i = 0 \Rightarrow a_i = b_i$$

۶ = ادلا حرم هر عقد به صورت ترکیبی خفی از زنده هانت زدا ۵-۷، اتو لیدی کند

حالت اولی
 $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$
 $0 x_1 + 0 x_2 + \dots + 0 x_n = 0$
 $\forall i \quad a_i = 0$

سنی ۱۳۱۲ - حجۃ المستقل خواہد است .

۱.۱۴. الف: فرض کنید که یک زیرمجموعه مستقل خطی از فضای برداری V باشد. همچنین فرض کنید $\{x\} \subseteq V$ در این صورت $\{x\} \cup S$ وابسته خطی است اگر تنها اثر $x \in \text{Span}(S)$.

برهان: $\Leftarrow$ چون $\{x\} \cup S$ وابسته خطی است لذا بردارهای $a_1, \dots, a_n$ موجود هستند به طوری که $x_1, \dots, x_n$ وابسته هستند.

چون که مستقل خطی است پس باید یکی از a_i ها برابر با x باشد مثلاً x_1 بنابراین داریم

$$a_1 x + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0 \quad (a_1 \neq 0)$$

بنابراین

$$x = -a_1^{-1} a_2 x_2 - a_1^{-1} a_3 x_3 + \dots - a_1^{-1} a_n x_n \in \text{Span}(S).$$

$\Rightarrow$ چون $x \in \text{Span}(S)$ لذا بردارهای $a_1, \dots, a_n \in F$ موجود هستند که

$$x = a_1 x + \dots + a_n x_n \Rightarrow -x + a_1 x + \dots + a_n x_n = 0$$

و $x \neq x$ از این معادله $\{x\} \cup S$ وابسته خطی است. ■

۱.۱۳. قضیه: فرض کنید فضای برداری V توسط یک زیرمجموعه S متناهی از V تولید شده باشد. در این صورت یک زیرمجموعه $\emptyset \neq S_0 \subseteq S$ موجود است که تشکیل یک پایه برای V دهد. بنابراین V دارای یک پایه متناهی است.

برهان: اگر $S = \emptyset$ و $\{0\} \subseteq V$ در این صورت $\{0\}$ یک زیرمجموعه $\emptyset$ است که یک پایه برای V است.

حال اگر $S \neq \emptyset$ در این صورت $\exists x_1 \neq 0, x_1 \in S$ و $\{x_1\}$ مستقل خطی است. سعی می‌کنیم $x_2, \dots, x_n$ در S را طوری پیدا کنیم که $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مستقل خطی باشد. با افزودن اعضای خواهم رسید (چون S متناهی است) که نمی‌توان عضو دیگری از S را به مجموعه اضافه کرد طوری که استقلال خطی حفظ شود. اکنون باید نشان دهیم که تشکیل یک پایه می‌دهد. بنابراین کافی است نشان دهیم که $\text{Span}(S) = V$. اما می‌دانیم که $\text{Span}(S_0) = V$ بنابراین $S_0 \subseteq \text{Span}(S)$ که نشان می‌دهیم $S_0 \subseteq \text{Span}(S)$.

$$x \in S_0 \Rightarrow x \in S \Rightarrow x \in \text{Span}(S)$$

$$x \notin S_0 \Rightarrow \{x\} \cup S \text{ وابسته خطی است}$$

پس $x \in \text{Span}(S)$ (بنابراین $x \in \text{Span}(S)$)

بنابراین $S_0 \subseteq \text{Span}(S)$. ■

15 قضیه زیر نتایج آن هستند احکام در این فصل خواهد بود.

14.14 **قضیه:** فرض کنید β یک فضای برداری با پایه n عطفی β باشد. همچنین فرض کنید $S = \{y_1, \dots, y_m\}$ یک زیر مجموعه مستقل خطی از β باشد و $m \leq n$. در این صورت یک زیر مجموعه S_1 از β وجود دارد شامل دقیقاً $n-m$ عطفی برداری که $S \cup S_1$ را تولید می کنند.

برهان: اثبات توسط استقرا روی m خواهد بود. ابتدا فرض کنید $m=0$ در این صورت $S = \emptyset$ و ما می توانیم $S_1 = \beta$ اختیار کنیم. اکنون فرض کنید حکم برای همه $m < n$ درست باشد تا حکم را برای $m+1$ ثابت کنیم. بنابراین فرض کنید $S = \{y_1, \dots, y_m, y_{m+1}\}$ یک زیر مجموعه مستقل خطی از β باشد.

می دانیم که هر زیر مجموعه S از جمله $\{y_1, \dots, y_m, y_{m+1}\}$ نیز مستقل خطی است. بنابراین با توجه به فرض استقرا داریم که بردارهای $\{x_1, \dots, x_{n-m}\}$ در β موجود هستند به طوری که $\{S \cup \{x_1, \dots, x_{n-m}\}\}$ را تولید می کنند.

بنابراین اسکالرهای $a_1, \dots, a_m$ و $b_1, \dots, b_{n-m}$ در F موجود اند به طوری که

$$y_{m+1} = a_1 y_1 + \dots + a_m y_m + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_{n-m} x_{n-m}$$

بدیهی است که بعضی از b_i ها باید مخالف صفر باشند زیرا در غیر این صورت y_{m+1} ترکیب خطی از $y_1, \dots, y_m$ خواهد بود که این تناقض است. مثلاً فرض کنید $b_1 \neq 0$ بنابراین داریم

$$x_1 = (-b_1^{-1} a_1) y_1 + \dots + (-b_1^{-1} a_m) y_m - (-b_1^{-1}) y_{m+1} + (-b_1^{-1} b_2) x_2 + \dots + (-b_1^{-1} b_{n-m}) x_{n-m}$$

بنابراین $x_1 \in \text{span}(\{y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, x_2, \dots, x_{n-m}\})$ در نتیجه

$$\{y_1, \dots, y_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m}\} \subseteq \text{span}(\{y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, x_2, \dots, x_{n-m}\})$$

بنابراین $\text{span}(\{y_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+1}, x_2, \dots, x_{n-m}\}) = \beta$

بنابراین کافی است $S_1 = \{x_2, \dots, x_{n-m}\}$ را اختیار کرد.

□

16 نتیجه: فرض کنید V یک فضای برداری با پایه n عضوی β باشد. در استیمرت هر زیرمجموعه مستقل خطی از V حداکثر n عضو یک پایه برای V است. ن برهان

فرض کنید $\{v_1, \dots, v_k\}$ یک زیرمجموعه مستقل خطی از V با دقیقاً n عضو باشد. با توجه به قضیه یک زیرمجموعه k از β با $n-k+1$ عضو وجود دارد به طوری که $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k+1}\}$ یک پایه برای V است. ن برهان

مثال: تحقیق کنید که بردارهای $(1, -3, 2)$ ، $(4, 1, 0)$ ، $(0, 2, -1)$ در $\mathbb{R}^3$ یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ می دهند. ن برهان

حیثین می دانیم $\mathbb{R}^3$ دارای یک پایه از ۳ عضوی است که این سه بردار مستقل خطی باشند. آنگاه ملحق نتیجه یک پایه خواهند بود.

$$a_1(1, -3, 2) + a_2(4, 1, 0) + a_3(0, 2, -1) = 0$$

$$\begin{cases} a_1 + 4a_2 = 0 \\ -3a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \\ 2a_1 - a_3 = 0 \end{cases}$$

تنها جواب این دستگاه معادلات $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ است لذا آنها مستقل خطی هستند.

1.16 نتیجه: فرض کنید V یک فضای برداری با پایه n عضوی β باشد. در این صورت هر زیرمجموعه ای از V با بیش از n عضو، وابسته خطی خواهد بود. در نتیجه هر زیرمجموعه مستقل خطی از V حداکثر دارای n عضو است. ن برهان

فرض کنید S یک زیرمجموعه V با بیش از n عضو باشد. فرض می کنیم S مستقل خطی باشد. آنگاه بتناقض برسیم.

فرض کنیم S یک زیرمجموعه k با $n < k$ عضو باشد. با توجه به نتیجه قبل S یک پایه برای V است. فرض کنید $x \in S$ ، $x \notin S$ ، در این صورت

1.12 $x \in \text{Span}(S) = V$ $\Rightarrow \{x\} \cup S$ یک پایه برای V است. بنابراین $k+1$ وابسته خطی است که این یک تناقض است لذا S نمی تواند مستقل خطی باشد. ن برهان

1.17 نتیجه: فرض کنید V یک فضای برداری با پایه n عضوی β باشد. در این صورت هر پایه از V دقیقاً n عضو خواهد داشت.

ن
مرحبا

نرخن کسید که یو دندری از V با m عنصر باشد. نشان می دهیم که $m \leq n$
 اگر نتیجه قبل را در مرتبه به کار ببریم بدست خواهیم آورد که یکبار
 یکبار $m \leq n$. بنابراین $n = m$. ■

با توجه به نتیجه بالا می توان گفت که اگر یک فضا برداری دلخواه یک یو تنه ای باشد
 آنگاه تعداد عناصر هر یو ای از این فضا همواره یکی است. بنابراین می توان تعریف کرد

تعریف: فضا برداری V را از بعد متناهی می نامیم اگر V دارای یو ای متناهی باشد.
 به این تعداد عناصر یو ای اصطلاحاً بعد فضا گفته می شود و با $\dim(V)$
 نشان داده می شود. اگر یک فضا برداری از بعد متناهی نباشد آن را از بعد
 نامتناهی می نامیم.

مثال: فضا برداری $\mathbb{R}^n$ دارای بعد صفر است.
 فضا برداری $\mathbb{R}^n$ دارای بعد n است
 فضا برداری $P(\mathbb{R})$ دارای بعد نامتناهی است
 فضای برداری اعداد مختلط $\mathbb{C}$ روی حودس دارای بعد 1 است
 با $\{1\}$
 اما $\mathbb{C}$ روی $\mathbb{R}$ دارای بعد 2 است با $\{1, i\}$ زیرا $i^2 = -1$
 $\dim(\mathbb{C}) = 2$

1.18 نتیجه: نرخن کسید $\dim V = n$ و یک زیر مجموعه V با n عضو
 در این صورت که یک یو ای برای V است در نتیجه دقیقاً n عضو دارد.
 پس S

برهان: با توجه به قضیه 1.13 زیر مجموعه ای از V که موجود است که تشکیل یک یو ای برای V دهد اما
 چون n عضو است لذا S نیز باید n عضو داشته باشد.
 بنابراین چون $S_1 \subseteq S$ که S نیز n عضو خواهد داشت. ■

1.19 نتیجه: نرخن کسید $\dim V = n$ یک یو ای برای V باشد همچنین نرخن کسید که یک زیر
 مجموعه مستقل خطی از V شامل m عضو باشد. در این صورت زیر مجموعه S از β
 خواهد بود که $S \cup S_1$ یک یو ای برای V است.

برهان: با توجه به قضیه $m \leq n$ بنابراین با توجه به قضیه زیر مجموعه ای از β مثل S موجود است
 شامل دقیقاً $n-m$ عضو. طوریکه $S \cup S_1$ یک یو ای برای V باشد. چون $S \cup S_1$
 حداکثر n عضو دارد با توجه به نتیجه قبل $S \cup S_1$ یک یو ای برای V است. ■

1.20 **قضیه:** فرض کنید V فضای برداری از بعد n و W یک زیرفضای V باشد. در این صورت W از بعد متناهی است و $\dim W \leq n$. به علاوه اگر $\dim(W) = n$ آنگاه $W = V$.

پرسش: اگر $\dim W = 0 \leq n$ در این صورت W از بعد متناهی خواهد بود. حال فرض کنید $0 < \dim W \leq n$.

اکنون $\{x_1, \dots, x_k\}$ یک زیر مجموعه مستقل خطی از W است. آنگاه این بردارها را ادامه دهیم و عناصر $x_{k+1}, \dots, x_n$ را به آن اضافه کنیم تا n بردار مستقل خطی از W به این مجموعه، استقلال خطی را به هم بزنیم. در این صورت $\{x_1, \dots, x_n\}$ یک زیر مجموعه مستقل خطی از W و در نتیجه یک مجموعه مستقل خطی از V است. لذا چون $\dim V = n$ طبق 1.16 $k \leq n$ خواهد بود.

از طرف دیگر ادعا می‌کنیم که این مجموعه حوزگی برای W است زیرا اگر عضو دیگری از W به آن اضافه کنیم، چون $\{x_1, \dots, x_n\}$ وابسته خطی است پس

$$x \in \text{span}(\{x_1, \dots, x_n\})$$

بنابراین W مولد W است. لذا W یک فضای k بعدی است. لذا $\dim W = k \leq n$.

حال اگر $\dim W = n$ در این صورت برای W ، طبق **نتیجه** 1.15، $W = V$ یک فضای n بعدی خواهد بود. لذا $W = V$.

1.21 **نتیجه:** فرض کنید W یک زیرفضای V باشد. در این صورت W دارای یک پایه متناهی است و هر پایه برای W یک زیر مجموعه از یک پایه برای V است.

پرسش: با توجه به قضیه 1.20 و برای W از بعد k خواهد بود. اگر k یک پایه برای V باشد طبق قضیه 1.14 زیر مجموعه S از k موجود است که $S \cup S_1$ یک مولد برای V خواهد بود و همگنی طبق **نتیجه** 1.18، لذا $S \cup S_1$ یک پایه برای V خواهد بود.

درجه‌های جلا به مثل زیر فضاهای W_1 و W_2 را عددی عددی در $W_1 \cap W_2$ و $W_1 + W_2$ هستند. این بسیار طبیعی است که بدو هم عددی فضای W_1 و W_2 باشد. $W_1 \cap W_2$ را بعد W_1 خواهد داشت.

1.22 **قضیه:** فرض کنید W_1 و W_2 زیر فضاهای V باشند. در این صورت $W_1 + W_2$ نیز یک فضای V خواهد بود و

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

پرسش: چون $W_1 \cap W_2$ یک زیرفضای W_1 و W_2 است و چون W_1 و W_2 متناهی البعد هستند لذا $W_1 \cap W_2$ نیز متناهی البعد است. فرض کنیم $\{x_1, \dots, x_k\}$ یک پایه برای $W_1 \cap W_2$ باشد.

الگدن با توجه به نتیجه قبل (۱.۲۱) می توان برای W_1 و W_2 پیدا کرد. یک زیر
 مجموعه آن باشد. بنابراین می توان گفت که β_1 و β_2 دو بردارند به طوری که
 $\beta_1 \cup \beta_2$ یک پایه برای W_1 و $\beta_2 \cup \beta_3$ یک پایه برای W_2 باشد.
 $\beta_1 = \{z_1, \dots, z_m\}$ و $\beta_2 = \{y_1, \dots, y_r\}$

کافی است نشان دهیم که
 است زیرا با این صورت $W_1 + W_2$ متناهی السب خواهد بود

$$\dim(W_1 + W_2) = k + r + m = (k + r) + (k + m) - k \\ = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

برای اتمام ثابت کنیم $\beta_1 \cup \beta_2 \cup \beta_3$ یک پایه برای $W_1 + W_2$ است. استیلا می دهیم
 که مستقل خطی است. فرض کنید

$$a_1 x_1 + \dots + a_k x_k + b_1 y_1 + \dots + b_r y_r + c_1 z_1 + \dots + c_m z_m = 0$$

$$v_0 = a_1 x_1 + \dots + a_k x_k \in W_1 \cap W_2 \quad \text{تکرار دهید}$$

$$v_1 = b_1 y_1 + \dots + b_r y_r \in W_1 \quad (*)$$

$$v_2 = c_1 z_1 + \dots + c_m z_m \in W_2$$

رایحه (*) را می توان به صورت زیر نوشت

$$v_0 + v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow \underbrace{-v_2}_{W_2} = \underbrace{v_0 + v_1}_{W_1}$$

$$\Rightarrow -v_2 \in W_1 \cap W_2$$

بنابراین

$$-v_2 = d_1 x_1 + \dots + d_k x_k \Rightarrow$$

$$0 = v_0 + v_1 + v_2$$

$$= (a_1 x_1 + \dots + a_k x_k) + (b_1 y_1 + \dots + b_r y_r) + (-d_1 x_1 - \dots - d_k x_k)$$

$$= (a_1 - d_1) x_1 + \dots + (a_k - d_k) x_k + b_1 y_1 + \dots + b_r y_r$$

که این یک ترکیب خطی از عناصر W_1 و W_2 است زیرا

$$\forall i \quad u_i = d_i, \quad b_i = 0$$

نابراین از * داریم

$$0 = v_0 + v_1 + v_2 = a_1 x_1 + \dots + a_k x_k + c_1 z_1 + \dots + c_m z_m$$

که این یک ترکیب خطی از عناصر $\beta_0 \cup \beta_2$ است لذا
 $\forall i \quad a_i = 0, \quad \forall j \quad c_j = 0$
 بنابراین نشان داده شد که $\beta_0 \cup \beta_2$ مستقل خطی است.

حال بایزینشاییم که این دو هم $W_1 + W_2$ را ایجاد می کنند. می دانیم که

$$\text{span}(\beta_0 \cup \beta_1) = W_1$$

$$\text{span}(\beta_0 \cup \beta_2) = W_2$$

یا

$$\begin{aligned} \text{span}(\beta_0 \cup \beta_1 \cup \beta_2) &= \text{span}((\beta_0 \cup \beta_1) \cup (\beta_0 \cup \beta_2)) \\ &= \text{span}(\beta_0 \cup \beta_1) + \text{span}(\beta_0 \cup \beta_2) \\ &= W_1 + W_2 \end{aligned}$$

نابراین $\beta_0 \cup \beta_1 \cup \beta_2$ یک بی برای $W_1 + W_2$ است. ■

2.23 نتیجه: فرض کنید W_1 و W_2 زیرفضاهای متناهی البعد از فضای برداری V باشند به طوری که

$$V = W_1 + W_2 \quad \text{در این صورت } V \text{ یک جمع مستقیم از } W_1 \text{ و } W_2 \text{ است اگر و تنها اگر}$$

$$\dim(V) = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

برهان: با توجه به قضیه قبل بدیهی است. ■

* مثال: فرض کنید F یک میدان نامتناهی و R یک عضو دلخواه از F . همچنین فرض کنید

$$W_1 = \{ f(x) \in P_n(F) \mid \forall x \quad f(x) = a \quad \text{for some } a \in F \}$$

$$W_2 = \{ f(x) \in P_n(F) \mid f(0) = 0 \}$$

به راحتی می توان دید که W_1 و W_2 زیرفضاهای V هستند و

$$P_n(F) = W_1 \oplus W_2.$$

$$\begin{aligned} f(x) \in P_n(F) &\Rightarrow g(x) = f(x) \in W_1 \Rightarrow \\ h(x) &= f(x) - f(0) \in W_2 \quad (h(0) = 0) \end{aligned}$$