۴.۲ - خانواده و مجموعه های اندیس دار

همانطور که قبلاً اشاره شد در مجموعه ها فرض بر این است که اعضاء مجموعه متمایز هستند. در مجموعه خانواده می توانند عناصر متمایز نباشند.

۱.۴.۲ تعریف: پس خانواده دسته ای از اشیاء است که ممکن است از یکدیگر متمایز نباشند مثلاً $\{a,a,a\}$ یک خانواده است با سه عنصر a,a,a ولی همین خانواده اگر به عنوان مجموعه در نظر گرفته شود همان مجموعه تک عنصری $\{a\}$ است که فقط یک عنصر دارد.

۲.۴.۲ تعریف: فرض کنیم Γ یک مجموعه باشد و به هر عضو Γ مثل γ یک مجموعه A_γ متناظر باشد. در این صورت خانواده تمام مجموعه های نظیر A_γ را خانواده مجموعه های اندیس دار گوییم و آن را به صورت زیر نشان می دهیم

$$\{A_\gamma \mid \gamma\in\Gamma\} \quad \text{یا} \quad \{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$$

۳.۴.۲ مثال: فرض کنید مجموعه های $\{1,2\},\{2,4\},\{3,6\},\dots$ را داشته باشیم اگر در این حالت $\Gamma=\mathbb{N}$ اختیار کنیم و قرار دهیم برای هر $n\in\mathbb{N}$، $A_n=\{n,2n\}$ در این صورت یک خانواده این مجموعه ها را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{یا} \quad \{\{n,2n\}\mid n\in\mathbb{N}\} \quad \text{یا} \quad \{A_n \mid n\in\mathbb{N}\}$$

یک خانواده دلخواه ممکن است اندیس دار نباشد ولی می توان یک مجموعه را طوری پیدا کرد که توسط آن این خانواده را اندیس دار نمود مثلاً

۴.۴.۲ مثال: خانواده F متشکل از مجموعه های $\emptyset$ و $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$، R و $\mathbb{R}$ را اندیس دار کنید.

$I=\{1,2,3,4,5,6\}$

لذا $A_1=\emptyset$ ، $A_2=\mathbb{N}$ ، … $A_5=R$ ، $A_6=\mathbb{R}$

$$F=\{A_i \mid i=1,\dots,6\} \quad \text{یا} \quad F=\{A_i\}_{i\in\{1,\dots,6\}}$$

معمولاً همه نمادهای که در مجموعه ها داریم برای خانواده ها نیز به کار می روند مثلاً $\subseteq$ ، $\in$ ، $\notin$ ، $\not\subseteq$ ، $\cap$ ، $\cup$ ، …

۵.۴.۲ تعریف: فرض کنیم F خانواده ای دلخواه از مجموعه ها باشد. اجتماع مجموعه های خانواده F مجموعه تمام عناصری است که به یکی از مجموعه های خانواده F مانند A متعلق باشد.

این اجتماع را با نماد $\bigcup \mathcal{F}$ یا $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{F}} A$ نشان می‌دهیم و عبارت است از

$$\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A = \{x\in U \mid \exists A\in\mathcal{F},\ x\in A\}$$

$\{x \mid x\in A$ برای Aهای در $F\}$

اگر خانواده F با Γ اندیس گذاری شده باشد می‌توان اجتماع F را به صورت زیر هم نوشت $F=\{A_\gamma \mid \gamma\in\Gamma\}$

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \mid \exists \gamma\in\Gamma,\ x\in A_\gamma\}$$

اگر مجموعه اندیس‌گذار Γ متناهی باشد مثلاً $\Gamma=\{1,2,\dots,n\}$ آنگاه به جای $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ می‌توان نوشت

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{یا} \quad A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n$$

۲.۳.۴ مثال: اجتماع خانواده مجموعه‌های زیر را پیدا کنید

$\{1\}, \{2,3\}, \{3,4,5\}, \dots, \{n, n+1, \dots, 2n-1\}$

حل: ابتدا این خانواده از مجموعه‌ها را با مجموعه $\Gamma=\{1,2,\dots,n\}$ اندیس‌گذاری می‌کنیم

$$A_i = \{i, i+1, \dots, 2i-1\} \qquad \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A = \bigcup_{i=1}^{n} \{i, i+1, \dots, 2i-1\} = \{1,2,\dots,2n-1\}$$

توجه می‌کنیم که هر یک از اعداد $1,\dots,2n-1$ به بعضی از A_iها متعلق است

۷.۳.۴ تعریف: فرض کنیم $\mathcal{F}$ خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌ها باشد. اشتراک مجموعه‌های $\mathcal{F}$ مجموعه تمام عضوهایی است که به تمام مجموعه‌های $\mathcal{F}$ تعلق دارند. آن را با نماد $\bigcap \mathcal{F}$ یا $\bigcap\limits_{A\in\mathcal{F}} A$ نشان می‌دهیم لذا

$$\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A = \{x \mid \forall A\in\mathcal{F},\ x\in A\} = \{x \mid x\in A \text{ برای هر } A\in\mathcal{F}\}$$

اگر $\mathcal{F}$ با Γ اندیس‌گذاری شده باشد می‌توان نوشت

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \mid \forall \gamma\in\Gamma,\ x\in A_\gamma\}$$

و اگر Γ یک مجموعه متناهی باشد مثلاً $\Gamma=\{1,2,\dots,n\}$ آنگاه

(۳۰) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$.

قضیه ۸.۴.۲:

فرض کنیم $\{A_\gamma \mid \gamma\in\Gamma\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد که در آن $\Gamma=\phi$. در اینصورت:

الف) $\bigcup_{\gamma\in\phi} A_\gamma=\phi$

ب) $\bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma = U$ (U مجموعه مرجع است).

برهان. (الف). برای اثبات اینکه $\bigcup_{\gamma\in\phi}A_\gamma=\phi$ هم‌ارز آن است که $\forall x\in U,\ x\notin \bigcup_{\gamma\in\phi}A_\gamma$ را نشان دهیم.

$$x\notin \bigcup_{\gamma\in\phi}A_\gamma \equiv \neg\Big(x\in \bigcup_{\gamma\in\phi}A_\gamma\Big) \equiv \neg(\exists \gamma\in\phi;\ x\in A_\gamma)$$
$$\equiv \forall\gamma\in\phi;\ x\notin A_\gamma$$
$$\equiv \gamma\in\phi \Rightarrow x\notin A_\gamma$$

که به انتفای مقدم برقرار است.

ب). برای اثبات ب کافی است نشان دهیم که هر $x\in U$ را در نظر بگیریم آنگاه $x\in\bigcap_{\gamma\in\phi}A_\gamma$.

$$x\in\bigcap_{\gamma\in\phi}A_\gamma \equiv \forall\gamma\in\phi;\ x\in A_\gamma \equiv \gamma\in\phi \Rightarrow x\in A_\gamma$$

که مجدداً به انتفای مقدم برقرار است. □

۹.۴.۲ (تعمیم قضیه دمورگان):

فرض کنیم $\{A_\gamma\mid\gamma\in\Gamma\}$ خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌ها باشد. در اینصورت

الف) $\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\Big)' = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}A'_\gamma$

ب) $\Big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\Big)' = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}A'_\gamma$ (اثبات ب بطور مشابه)

برهان: الف)

$$x\in\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\Big)' \equiv \neg\Big(x\in\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\Big)\Big) \equiv \neg(\exists\gamma\in\Gamma;\ x\in A_\gamma)$$
$$\equiv(\forall\gamma\in\Gamma)(x\notin A_\gamma)\equiv(\forall\gamma\in\Gamma)(x\in A'_\gamma)$$
$$\equiv x\in\bigcap A'_\gamma$$

(با توجه به اصل گسترش حکم بدست می‌آید)

قضیه ۲.۴.۱۰ (تعمیم قانونهای پخش‌پذیری)

فرض کنیم A یک مجموعه و $F=\{B_\gamma \mid \gamma\in\Gamma\}$ یک خانواده دلخواه از مجموعه‌ها باشد. در این صورت

الف) $A\cap\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$.

ب) $A\cup\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A\cup B_\gamma)$.

برهان:

$$\begin{aligned} x\in A\cap\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) &\equiv x\in A \wedge x\in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma \\ &\equiv x\in A \wedge \exists \gamma\in\Gamma;\ x\in B_\gamma \\ &\equiv \exists\gamma\in\Gamma;\ x\in A\cap B_\gamma \\ &\equiv x\in \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A\cap\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$$

ب) به عنوان تمرین ∎

۲.۴.۱۱ تعریف: افراز یک مجموعه: فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد. افراز مجموعه X یعنی مجموعه‌ای مانند P از زیرمجموعه‌های غیرتهی از X که در دو شرط زیر صدق کنند

(۱). اعضای P دو به دو از هم مجزا باشند به عبارت دیگر

$$\forall A,B\in P;\ A\neq B \Rightarrow A\cap B=\emptyset$$

(۲) ثانیاً $\bigcup P=X$ یعنی برای هر $x\in X$، $A\in P$ ای موجود باشد که $x\in A$

$$\forall x\in X\ \exists A\in P;\ x\in A.$$

مثال. فرض کنیم

$P_1=\{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\}\}$ ، $X=\{0,1,2,3\}$

$P_2=\{\{0\},\{1,2,3\}\}$

هر دو افرازهای مجموعه X هستند. ...

فصل ۳: رابطه‌ها و توابع

۳.۱ حاصلضرب دکارتی دو مجموعه

برای هر دو شیء a و b می‌توانیم شیء جدید زوج مرتب (a,b) را تعریف کنیم و تنها قید داشته باشیم که شیء اول باید a و شیء دوم باید b باشد و از نظر ما (a,b) با (b,a) متفاوت است چون ترتیبی که قائل شد. اما سیب a و b هم فرق می‌کند اما این نوع تعریف کردن شاید خیلی شهودی باشد و قانون مشخصی نداشته باشد. لذا در نظریهٔ

تعریف ۳.۱.۱

مجموعه‌ها زوج مرتب (a,b) را به صورت مجموعه $\{\{a\},\{a,b\}\}$ تعریف می‌کنند. این ترتیب کاملاً ترتیبی که مدنظر بوده در اینجا در نظر گرفته شده است. اما توقع داریم که آنچه در زوج‌های مرتب معمولاً برقرار است که:

$(a,b)=(x,y) \iff a=x, b=y$ با این تعریف هم درست باشد. پس باید نشان دهیم که این برقرار است.

برهان: اگر $a=b$ آنگاه (a,b) مجموعه $\{\{a\}\}$ خواهد بود. به عکس اگر (a,b) یک مجموعه تک‌عضوی باشد پس باید $\{a\}=\{a,b\}$ و لذا باید $b\in\{a\}$ یعنی $a=b$. لذا از اینکه $(a,b)=(x,y)$ نتیجه می‌شود که (x,y) هم باید یک مجموعه تک‌عضوی باشد یعنی $\{\{a\}\}=\{\{x\}\}$ یعنی $\{x\}=\{x,y\}$ پس $x=y$ لذا $a=b=x=y$.

اما اگر $a\neq b$ در این صورت زوج‌های مرتب $\{\{a\},\{a,b\}\}$ و $\{\{x\},\{x,y\}\}$ دقیقاً شامل یک مجموعه تک‌عضوی هستند پس باید $\{a\}=\{x\}$ یعنی $a=x$ و $\{x,y\}=\{a,b\}$ چون $a=x$ ~~لذا~~ $b\in\{x,y\}$ اما $b\neq x$ زیرا در غیر این صورت باید $b=x=a$ که ✗ پس باید $b=y$ □

لذا همواره زوج مرتب (a,b) را به صورت $\{\{a\},\{a,b\}\}$ و مسلماً زوج مرتب (b,a) را $\{\{b\},\{b,a\}\}$ در نظر می‌گیریم.

۲.۱.۳. حاصلضرب دکارتی دو مجموعه

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند. در این صورت مجموعهٔ تمام زوج‌های مرتب (a,b) که در آن $a\in A$ و $b\in B$ را با نماد $A\times B$ نمایش می‌دهیم و به آن حاصلضرب دکارتی A و B گوییم، یعنی

$$A\times B=\{(a,b) \mid a\in A, b\in B\}$$

a را مؤلفهٔ اول و b را مؤلفهٔ دوم نامیم

نکته ۳.۱.۳: در واقع $A\times B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B))$ است زیرا

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$$

$$\{a\},\{a,b\}\in \mathcal{P}(A\cup B) \Rightarrow \{\{a\},\{a,b\}\}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B)) \Rightarrow$$

$$A\times B\subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B)) \Rightarrow$$

$$A\times B\in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B)))$$

بنابراین $A\times B$ یک مجموعه است.

نکته ۴.۱.۳: بدیهی است که در حالت کلی $A\times B$ و $B\times A$ مساوی نیست

مثال ۵.۱.۳: فرض کنیم A یک مجموعه باشد در اینصورت $A\times\emptyset=\emptyset$ و $\emptyset\times A=\emptyset$. روشن است که $A\times\emptyset$ برابر همه زوجهای مرتب (a,b) است که $a\in A$ و $b\in\emptyset$. چون $\emptyset$ عضوی ندارد لذا مجموعه $A\times\emptyset$ نیز $\emptyset$ است.

قضیه ۶.۱.۳: فرض کنید A، B و C سه مجموعه باشند در اینصورت

الف)
$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

ب)
$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

برهان: الف) فرض کنیم (a,x) عضو دلخواهی از $A\times(B\cap C)$ باشد لذا

$$(a,x)\in A\times(B\cap C) \overset{\text{تعریف حاصلضرب دکارتی}}{\Longleftrightarrow} (a\in A\wedge (x\in B\cap C))$$

$$\Longleftrightarrow a\in A\wedge(x\in B\wedge x\in C) \quad \text{تعریف عضویت مجموعه اشتراک}$$

$$\Longleftrightarrow (a\in A\wedge a\in A)\wedge(x\in B\wedge x\in C) \quad \text{خودتوانی}$$

$$\Longleftrightarrow (a\in A\wedge x\in B)\wedge(a\in A\wedge x\in C) \quad \text{جابجایی و شرکت پذیری}$$

$$\Longleftrightarrow ((a,x)\in A\times B)\wedge((a,x)\in A\times C) \quad \text{تعریف حاصلضرب دکارتی}$$

$$\Longleftrightarrow (a,x)\in(A\times B\cap A\times C) \quad \text{تعریف اشتراک}$$

بنابراین $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ اصل تعریف

اثبات قسمت (ب) به عنوان تمرین. □

۷.۱.۳ قضیه: اگر A، B و C سه مجموعه دلخواه باشند، آنگاه

$$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$$

برهان:

تعریف حاصلضرب دکارتی

$$(a,x)\in A\times(B-C) \Leftrightarrow a\in A \wedge x\in(B-C)$$

تعریف تفاضل $\Leftrightarrow a\in A\wedge(x\in B\wedge x\notin C)$

خودتوانی $\Leftrightarrow (a\in A\wedge a\in A)\wedge(x\in B\wedge x\notin C)$

شرکت‌پذیری و جابجایی $\Leftrightarrow (a\in A\wedge x\in B)\wedge(a\in A\wedge x\notin C)$

تعریف حاصلضرب دکارتی $\Leftrightarrow ((a,x)\in A\times B)\wedge((a,x)\notin A\times C)$

تفاضل دو مجموعه
تعریف ~~حاصلضرب دکارتی~~ $\Leftrightarrow (a,x)\in((A\times B)-(A\times C))$

اصل گسترش $\Leftrightarrow A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$ □

۸.۱.۳ تعریف: فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند. هر زیرمجموعه از $A\times B$ را یک رابطه از A به B گوئیم. بنابراین اگر R یک رابطه از A به B باشد، آنگاه $R\subseteq A\times B$. حال اگر $A=B$ در اینصورت گوئیم R یک رابطه روی A است.

۹.۱.۳ مثال: فرض کنیم $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,5\}$. حاصلضرب دکارتی $A\times B$ عبارت است از

$$A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$

لذا $R_1=\{(1,4)\}$ و $R_2=\{(2,5),(1,5)\}$ هر دو رابطه‌هایی از A به B هستند.

۱۰.۱.۳ قرارداد: اگر R یک رابطه از A به B باشد و $(a,b)\in R$ گوئیم a در رابطه با b است یا a رابطه R با b دارد و می‌نویسیم aRb، و اگر $(a,b)\notin R$، گوئیم a با b رابطه R ندارد و می‌نویسیم $a\not R b$.

۱۰.۱.۳ مثال: فرض کنیم X یک مجموعه باشد و رابطه R را رابطه تعلق در نظر بگیریم به عبارت دیگر $xRy \Leftrightarrow x$ عضوی از y باشد در اینصورت بدیهی است که $R\subseteq X\times P(X)$ است و

$$R=\{(x,A)\mid x\in A\}$$

۱۱.۱.۲ تعریف: فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند نه لزوماً متمایز. در این صورت اگر R رابطه‌ای از A به B باشد، آنگاه وارون R، را با R^{-1} نمایش می‌دهیم و رابطه‌ای است از B به A به طوری که به عبارت دیگر

$$bR^{-1}a \iff aRb$$

$$R^{-1}=\{(b,a)\mid (a,b)\in R\}$$

۱۲.۱.۲ تعریف: فرض کنیم R رابطه‌ای از A به B باشد به عبارت دیگر $R\subseteq A\times B$. در این صورت دامنه R را با نماد Dom(R) نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$Dom(R)=\{a\in A\mid \exists b\in B;\ (a,b)\in R\}$$

و برد R را با نماد Im(R) نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$Im(R)=\{b\in B\mid \exists a\in A;\ (a,b)\in R\}$$

بدیهی است که $Dom(R)\subseteq A$ ، $Im(R)\subseteq B$.

در مثال ۹.۱.۲ بدیهی است که

$$Dom(R_1)=\{1\},\quad Im(R_1)=\{4\}$$

$$Dom(R_2)=\{2,1\},\quad Im(R_1)=\{5\}$$

و در مثال ۱۰.۱.۲ روشن است که $Dom(R)=X$ ، $Im(R)=P(X)$.

۱۳.۱.۲ قضیه: اگر R_1 و R_2 دو رابطه روی A باشند ثابت کنید $(R_1\cap R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cap R_2^{-1}$

برهان:

$$\begin{aligned}
(x,y)\in(R_1\cap R_2)^{-1} &\iff (y,x)\in R_1\cap R_2\\
&\iff (y,x)\in R_1 \wedge (y,x)\in R_2\\
&\iff (x,y)\in R_1^{-1}\wedge (x,y)\in R_2^{-1}\\
&\iff (x,y)\in R_1^{-1}\cap R_2^{-1}\\
&\Rightarrow (R_1\cap R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cap R_2^{-1}
\end{aligned}$$

∎

۱۴.۱.۳ تعریف: فرض کنیم R رابطه‌ای روی مجموعهٔ X باشد در این صورت گوییم

(i). R انعکاسی است اگر و فقط اگر برای هر $x\in X$، xRx.

(ii). R متقارن است اگر و فقط اگر برای هر x و y از X داشته باشیم
$xRy \Rightarrow yRx$

(iii). R متعدی است اگر و فقط اگر برای هر x, y, z از X داشته باشیم
$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

(iv) R را یک رابطهٔ هم‌ارزی نامیم هرگاه انعکاسی، متقارن و متعدی باشد.

۱۵.۱.۳ مثال: (i) فرض کنید a, b, c در دو به دو متمایز باشند و $A=\{a,b,c\}$ و

$R=\{(a,a),(a,b),(b,b),(c,c)\}$ روشن است که R، انعکاسی است ولی متقارن نیست زیرا زوج (a,b) هست ولی (b,a) نیست و همچنین متعدی است.

(ii) رابطهٔ تساوی روی $\mathbb{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است

۱- انعکاسی: $\forall a\in\mathbb{R},\ a=a$

۲- متقارن: $\forall a,b\in\mathbb{R},\ a=b\Rightarrow b=a$

۳- متعدی: $\forall a,b,c\in\mathbb{R};\ a=b\wedge b=c\Rightarrow a=c$

(iii). فرض کنیم $A=\{a,b,c\}$ و

$R_1=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(c,a),(a,c)\}$

بدیهی است این رابطه انعکاسی و متقارن است اما متعدی نیست.

(iv) $R_2=\{(a,b),(b,a),(b,b),(a,a)\}$ این رابطه متعدی و متقارن هست ولی انعکاسی نیست.

(v). فرض کنید m عددی صحیح و مثبت ثابت و دلخواه باشد. رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m ≡ روی اعداد صحیح را این‌طور تعریف می‌کنیم به عبارت دیگر

$$x\equiv y \pmod m \Leftrightarrow m\mid x-y\ (x-y=km).$$

می‌توان دید که این رابطه یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

۱- انعکاسی:

$\forall n \in \mathbb{Z};\quad n \equiv n \pmod m$

زیرا $n-n=0$; $m|0 \Rightarrow 0=m.0$

۲- تقارن: فرض کنیم $n \equiv k \pmod m \Leftarrow m|n-k \Leftarrow$

$n-k=tm \Rightarrow k-n=(-t)m \Rightarrow m|k-n \Rightarrow k \equiv n \pmod m$

۳- تعدی: فرض کنیم $n \equiv k \pmod m$ و $k \equiv t \pmod m$، لذا داریم

$m|n-k \Rightarrow n-k=qm$

$m|k-t \Rightarrow k-t=q'm \Rightarrow n-k+k-t=(q+q')m \Rightarrow$

$n-t=q''m \Rightarrow m|n-t \Rightarrow$

$n \equiv t \pmod m$.

۲.۳: رابطهٔ هم‌ارزی و افراز

۱.۲.۳ تعریف: فرض کنید X یک مجموعهٔ غیرتهی باشد. منظور از یک افراز X چون P، یک مجموعه از زیرمجموعه‌های ناتهی X است که در دو شرط زیر صدق کند.

الف) اگر $A,B \in P$ و $A \neq B$، آنگاه $A \cap B = \phi$.

ب) $\bigcup_{c \in P} c = \cup P = X$.

۲.۲.۳ مثال: فرض کنید $X=\mathbb{Z}$، $P=\{Z_0, Z_1\}$ که در آن

$Z_0=\{x \in \mathbb{Z} \mid$ زوج است $x\}$ $\quad$ $Z_1=\{x \in \mathbb{Z} \mid$ فرد است $x\}$

بدیهی است که P یک افراز برای $\mathbb{Z}$ است.

۳.۲.۳ مثال: فرض کنید $X=\mathbb{Z}$ و $P=\{T_0,T_1,T_2,T_3,T_4\}$ که در آن

$T_0=\{x \in \mathbb{Z} \mid x=5k, k \in \mathbb{Z}\}$ $\quad$ $T_4=\{x \in \mathbb{Z} \mid x=5k+4, k \in \mathbb{Z}\}$

$T_1=\{x \in \mathbb{Z} \mid x=5k+1, k \in \mathbb{Z}\}$

$T_2=\{x \in \mathbb{Z} \mid x=5k+2, k \in \mathbb{Z}\}$

$T_3=\{x \in \mathbb{Z} \mid x=5k+3, k \in \mathbb{Z}\}$،

بدیهی است که P یک افراز برای $\mathbb{Z}$ است.

۴۰

۶.۲.۳ قضیه: اگر P یک افراز از مجموعه غیرتهی X باشد. رابطه f با ضابطه

$$x f y \iff \exists A\in P;\ x,y\in A.$$

رابطه فوق یک رابطه هم‌ارزی است که P روی X القا می‌کند و مجموعه همه کلاس‌ها هم‌ارزی برابر P است.
به عبارت دیگر $\frac{X}{f}=P$.

برهان:
چون P یک افراز است لذا برای هر $x\in X$، $\exists A\in P$ و $x\in A$ یعنی $x,x\in A$ پس xfx یعنی f خاصیت انعکاسی دارد.

تقارن: بدیهی است که اگر xfy در اینصورت $\exists A\in P,\ x,y\in A$ پس $y,x\in A$ یعنی yfx.

تعدی: فرض کنیم xfy و yfz در اینصورت

$$\exists A\in P;\ x,y\in A$$
$$\exists B\in P,\ y,z\in B \Rightarrow A\cap B\neq\emptyset$$. تعریف افراز X

ضرورتاً نتیجه $A=B$ یعنی $x,z\in A$ پس xfz.

الآن فرض کنیم x یک عضو دلخواه از X باشد. چون $\cup P=X$ لذا $\exists A\in P$ که $x\in A$ و چون اعضای افراز P نمی‌توانند اشتراک داشته باشند پس x فقط در همین یک عضو یعنی A متعلق است. داریم $\frac{x}{f}\overset{?}{=}A$

$$\left(\begin{array}{l} \forall y\in \frac{x}{f} \Rightarrow (x,y)\in f \Rightarrow \exists A\ y\in A \\ y\in A \overset{x\in A}{\rightarrow} (x,y)\in f \rightarrow (y,x)\in f \rightarrow y\in \frac{x}{f} \end{array}\right)$$

۷.۲.۳ مثال: فرض کنید $X=\{a,b,c,d,e\}$ و $A=\{a,b\}$، $B=\{c,d,e\}$

(i)- تحقیق کنید $\{A,B\}$ یک افراز X است.

(ii)- رابطه القا شده توسط افراز $\{A,B\}$ بر X را بررسی کنید.

حل: (i)- بدیهی است که $A\neq\emptyset$، $B\neq\emptyset$، $A\cap B=\emptyset$، $A\cup B=X$. لذا $\{A,B\}$ یک افراز X است.

بین افراز یک مجموعه ناتهی و یک رابطه هم ارزی روی آن مجموعه ارتباط بسیار نزدیکی وجود دارد. برای این منظور نیاز به یک تعریف داریم

۳.۲.۲ تعریف: فرض کنیم E یک رابطه هم ارزی روی یک مجموعه ناتهی باشد. برای هر $x\in X$ قرار می‌دهیم

$$[x]=\frac{x}{E}=\bar{x}=\{y\in X \mid yEx\}=$$

و به آن کلاس هم ارزی x نسبت به رابطه E یا رده هم ارزی x نسبت به رابطه E گوییم.

مجموعه تمام کلاسهای هم ارزی X را نسبت به رابطه E با نماد $\frac{X}{E}$ نمایش می‌دهیم

$$\frac{X}{E}=\{\bar{x}\mid x\in X\}$$ X مدولو E

با توجه به تعریف فوق در مثال قبل می‌توان دید که اگر رابطه هم نهشتی به پیمانه ۵ را در نظر بگیریم کلاسهای هم ارزی این رابطه T_0، ...، T_4 خواهند بود

$$T_0=\bar{0},\quad T_1=\bar{1},\quad T_2=\bar{2},\quad T_3=\bar{3},\quad T_4=\bar{4}$$

در واقع در این مثال دیدیم که کلاسهای هم ارزی از این رابطه هم ارزی برای Z تشکیل یک افراز می‌دهند.
در واقع این در حالت کلی درست است و فقط برای این مثال نیست. در واقع می‌توان دید که:

۳.۲.۳ قضیه. فرض کنیم E یک رابطه هم ارزی روی مجموعه ناتهی X باشد. در اینصورت

الف) هر کلاس هم ارزی $\frac{x}{E}$ غیرتهی است.

ب) $\frac{x}{E}\cap\frac{y}{E}\neq\phi$ اگر و تنها اگر xEy.

ج) xEy آنگاه $\frac{x}{E}=\frac{y}{E}$.

د) اجتماع کلیه کلاسهای هم ارزی برابر خود مجموعه X است. به عبارت دیگر $\bigcup\frac{X}{E}=X$

برهان: الف) چون رابطه E دارای خاصیت انعکاسی است لذا برای هر $x\in X$، xEx و $x\in\frac{x}{E}$ پس $\frac{x}{E}\neq\phi$.

ب) ۱. فرض کنیم xEy در اینصورت $(x,y)\in E$ و ~~چون رابطه E متقارن است~~ (1)

حال نشان می‌دهیم $\frac{x}{E}\subseteq\frac{y}{E}$. پس فرض کنیم $z\in\frac{x}{E}$. در اینصورت

①، ② $\xrightarrow[\text{متعدی}]{E}$ $(z,y)\in E \Rightarrow z\in \frac{y}{E}$ ② $(z,x)\in E$

پس ثابت کردیم $\frac{x}{E}\subseteq\frac{y}{E}$

اما اکنون نشان می‌دهیم که $\frac{y}{E}\subseteq\frac{x}{E}$. فرض کنیم $z\in\frac{y}{E} \Rightarrow (z,y)\in E$ ③

③، ④ $\xrightarrow[E]{\text{تعدی}}$ $(z,x)\in E \Rightarrow z\in\frac{x}{E}$ ① $\xrightarrow[E]{\text{تقارن}}$ $(y,x)\in E$ ④

پس $\frac{y}{E}\subseteq\frac{x}{E}$ نیز ثابت شد که $\frac{y}{E}=\frac{x}{E}$.

ب) $\Leftarrow$ بدیهی است. اگر $xEy \Rightarrow x\in\frac{y}{E}$ و از طرفی نیز بنا به (الف) $x\in\frac{x}{E}$ پس $x\in\frac{x}{E}\cap\frac{y}{E}$.

$\Rightarrow$ فرض کنیم $\frac{x}{E}\cap\frac{y}{E}\neq\emptyset$. مثلاً $z\in\frac{x}{E}\cap\frac{y}{E}$. در این صورت

$$(z,x)\in E,\ (z,y)\in E$$

$\Downarrow$ تقارن E

$(x,z)\in E$ ، $\xrightarrow{E\ \text{تعدی}} (x,y)\in E \Rightarrow xEy.$

ج) اگر قرار دهیم $A=\bigcup\frac{X}{E}$ نشان می‌دهیم $A\subseteq X$ و $X\subseteq A$. بدیهی است که هر یک از $\frac{x}{E}\subseteq X$ $(x\in X)$ لذا $A=\bigcup\frac{X}{E}\subseteq X$. پس $A\subseteq X$. از طرف دیگر $\forall x\in X$

$$x\in\frac{x}{E}\subseteq\bigcup\frac{X}{E}\Rightarrow X\subseteq\bigcup\frac{X}{E}=A.$$

۳.۲.۵ قضیه: اگر E یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ ناتهی X باشد، آنگاه $\frac{X}{E}$ یک افراز X است.

برهان: با توجه به قضیهٔ قبل بدیهی است.

سؤالی که اکنون مطرح است این است که آیا از روی یک افراز می‌توان یک رابطهٔ هم‌ارزی ساخت که اعضای افراز همان کلاسهای هم‌ارزی شوند؟

۶.۲.۳ قضیه: اگر P یک افراز از مجموعه غیرتهی X باشد. رابطه $\not{f}$ با ضابطه

$$x\not{f}y \iff \exists A\in P\ ;\ x,y\in A.$$

رابطه فوق یک رابطه هم‌ارزی است که P روی X القا می‌کند و مجموعه همه کلاسها هم‌ارزی برابر P است.
به عبارت دیگر
$$\frac{X}{\not{f}}=P.$$

برهان:
چون P یک افراز است لذا برای هر $x\in X$، $\exists A\in P$ و $x\in A$ یعنی $x,x\in A$، پس $x\not{f}x$ یعنی $\not{f}$ خاصیت انعکاسی دارد.

تقارن: بدیهی است که اگر $x\not{f}y$ در اینصورت $\exists A\in P,\ x,y\in A$ پس $y,x\in A$ یعنی $y\not{f}x$.

تعدی: فرض کنیم $x\not{f}y$ و $y\not{f}z$ در اینصورت

$$\begin{matrix}\exists A\in P, & x,y\in A\\ \exists B\in P, & y,z\in B\end{matrix} \Rightarrow A\cap B\neq\emptyset$$
تعریف افراز X.
مگر آنکه $A=B$ یعنی $x,z\in A$، پس $x\not{f}z$.

الان فرض کنیم x یک عضو دلخواه از X باشد. چون $\bigcup P=X$ لذا $\exists A\in P$ که $x\in A$ و چون اعضاء افراز P نمی‌توانند اشتراک داشته باشند پس x فقط به همین یک عضو P یعنی A متعلق است. داریم
$$\frac{x}{\not{f}}\overset{?}{=}A$$

$$\left(\begin{matrix}\forall y\in\frac{x}{\not{f}}\Rightarrow (x,y)\in\not{f}\Rightarrow \exists\, A\ y\in A\\ y\in A\xrightarrow{x\in A}(x,y)\in\not{f}\rightarrow(y,x)\in\not{f}\rightarrow y\in\frac{x}{\not{f}}\end{matrix}\right)$$

۷.۲.۳ مثال: فرض کنید $X=\{a,b,c,d,e\}$ و $A=\{a,b\}$، $B=\{c,d,e\}$

(۱)- تحقیق کنید $\{A,B\}$ یک افراز X است.

(۲)- رابطه القا شده توسط افراز $\{A,B\}$ به X را بررسی کنید.

حل: (۱)- بدیهی است که $A\neq\emptyset$، $B\neq\emptyset$، $A\cap B=\emptyset$ و $A\cup B=X$. لذا $\{A,B\}$ یک افراز X است.

(ii). فرض کنیم رابطه‌ای که افراز فوق روی X القا می‌کند f نامیم، در اینصورت

$$(a,b)\in f \Leftrightarrow \exists X\in\{A,B\},\ a,b\in X$$

$$afb \Leftrightarrow \exists X\in P;\ a,b\in X$$

لذا

$$f=\{(a,a),(a,b),(b,b),(b,a),(c,c),(d,d),(e,e),(c,d),(d,c),(c,e),(e,c),(d,e),(e,d)\}$$

۸.۲.۳ مثال: رابطه هم‌نهشتی روی $\mathbb{Z}$ به پیمانه ۵ را در نظر بگیرید. کلاسهای هم‌ارزی این رابطه را پیدا کنید.

$$x \overset{(5)}{\equiv} y \Leftrightarrow x-y=5k.$$

این رابطه یک رابطه هم‌ارزی است (تمرین)

$$[0]=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\equiv 0 \pmod 5\}=\{x\in\mathbb{Z} \mid x=5k\}=\{\dots,-10,-5,0,5,10,\dots\}$$

$$[1]=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\equiv 1 \pmod 5\}=\{x\in\mathbb{Z} \mid x-1=5k\}=\{\dots,-9,-4,1,6,11,\dots\}$$

$$[2]=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\equiv 2 \pmod 5\}=\{x\in\mathbb{Z} \mid x-2=5k,\ x=5k+2\}=\{\dots,-8,-3,2,7,12,\dots\}$$

$$[3]=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\equiv 3 \pmod 5\}=\{x\in\mathbb{Z} \mid x=5k+3\}=\{\dots,-7,-2,3,8,13,\dots\}$$

$$[4]=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\equiv 4 \pmod 5\}=\{x\in\mathbb{Z} \mid x=5k+4\}=\{\dots,-6,-1,4,9,\dots\}.$$

لذا

$$\frac{\mathbb{Z}}{\equiv (\mathrm{mod}\ 4)}=\{[0],[1],[2],[3],[4]\}.$$

Scanned with CamScanner