۱.۷ روش‌های اثبات

۱.۷.۱ـ اثبات گزاره‌های شرطی:

(i). اثبات به روش انتفای مقدم

اگر x نشان دهنده یک عدد حقیقی باشد، گزاره شرطی "اگر $x<x$ آنگاه x مجذور کامل است". مقدم این گزاره همواره دروغ است لذا این گزاره شرطی همواره راست می‌باشد یعنی هر عددی که از خودش کوچکتر است مجذور کامل است. یک گزاره شرطی دارای ارزش T یک قضیه ریاضی است که اصطلاحاً گوئیم این قضیه به انتفاء مقدم برقرار است.

$$P \Rightarrow q$$
$$F$$

(ii). برای اثبات اینکه ترکیب شرطی مانند "اگر P آنگاه q" درست است کافی است ثابت کنیم که اگر P درست باشد، آنگاه q نیز درست است. در این صورت P را به عنوان فرض قضیه در نظر می‌گیریم و q را به عنوان حکم از آن استنتاج می‌کنیم.

مثال: نشان دهید که اگر n یک عدد صحیح فرد باشد، آنگاه n^2 نیز فرد است.

مدهال: فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح فرد دلخواه باشد، لذا $k\in\mathbb{Z}$ هست که $n=2k+1$

$$\Rightarrow n^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$$

پس n^2 نیز عددی فرد است.

(iii). اثبات به کمک عکس نقیض: می‌دانیم که یک گزاره شرطی $P\Rightarrow q$ با عکس نقیض خودش یعنی $\sim q \Rightarrow \sim P$ هم ارز است لذا برای اثبات درستی $P\Rightarrow q$ کافی است فرض کنیم q درست نباشد و از آن نتیجه بگیریم که P هم درست نیست.

مثال: نشان دهید اگر 2^n-1 عددی اول باشد، آنگاه n نیز اول است.

مدهال: برای اثبات حکم فوق عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم یعنی فرض می‌کنیم که n اول نباشد نشان می‌دهیم که 2^n-1 نیز اول نیست

فرض کنیم n اول نباشد لذا اعداد صحیح a,b موجودند که $2\leq a,b$ و $n=ab$. در این صورت

$$2^n-1=2^{ab}-1=(2^a-1)(2^{a(b-1)}+\dots+2^a+1)$$

چون $a\geq 2$ لذا $2^a-1>1$ یعنی 2^n-1 نیز اول نیست . بنابراین حکم برقرار است.

۲.۷.۱ اثبات قضایای دو شرطی

برای اثبات قضایای دو شرطی به صورت $p\Leftrightarrow q$ معمولاً استدلال را به صورت زیر تنظیم می کنند.

$$(p\Leftrightarrow q)\equiv(p\Rightarrow q \wedge q\Rightarrow p)$$

لزوم: در این قسمت p را فرض قرار داده و درستی q را اثبات می کنند و

کفایت: در این قسمت q را فرض قرار داده و p را اثبات می کنند

که در واقع مربوط می گردد به اثبات دو گزاره شرطی که راجع به آن صحبت کرده ایم.

۳.۷.۱ . روش برهان خلف

در روش برهان خلف بنا قرار است از یکی مفروضات گزاره q را ثابت کنیم یا به عبارت دیگر درستی گزاره q را نشان دهیم. در این صورت $\sim q$ را فرض می کنیم و با استفاده از مفروضات و قضایایی که قبلاً ثابت کرده ایم سعی می کنیم؛ در نتیجه به تناقض یا مشابه آن نقیض یکی از مفروضات قضیه یا قضایایی که قبلاً ثابت کرده ایم صحبت آوریم. در این صورت گوییم با توجه به تناقض فرض خلف باطل است و لذا خود حکم برقرار است

مثال: ثابت کنید اگر x گویا و y گنگ باشد آنگاه $x+y$ گنگ است.

برهان: به روش برهان خلف: فرض کنیم چنین نباشد یعنی $x+y$ گنگ نباشد. چون x گویا است لذا $y=x+y-x$ نیز باید گویا باشد که این تناقض با فرض گنگ بودن y است. لذا فرض خلف نادرست است و حکم برقرار است

۴.۷.۱ : عکس قضایا: می دانیم که ممکن است یک گزاره شرطی راست ولی عکس آن دروغ باشد لذا نتیجه می گیریم که ممکن است عکس یک قضیه، قضیه نباشد.

(۱۸)

به عنوان مثال اینکه $p \wedge q \Rightarrow q$ همواره درست است اما عکس آن چنین نیست

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \to q$	$q \to p \wedge q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	F
F	F	F	T	T

لذا قضایایی که به صورت یک استلزام نشان می شوند یک گزاره ~~[illegible]~~ شرطی همیشه درست هستند نیازی نیست که عکس آنها نیز قضیه باشند یعنی همواره ارزش آن درست باشد.

مثلاً

فرض کنیم A و B دو ماتریس 2×2 باشند در این صورت می توان دید که

اگر $A=0$ یا $B=0$ آنگاه $AB=0$ این یک قضیه است اما عکس آن درست نیست

اگر $AB=0$ آنگاه $A=0$ یا $B=0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A \neq 0, \ B \neq 0$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

۲ـ فصل دوم: نظریهٔ مجموعه‌ها

۱.۲ـ مجموعه‌ها و زیرمجموعه‌ها

یک کلمه گرد، یک خوشه انگور، یک فوج کبوتر مثال‌هایی از مجموعه‌هایی از اشیاء. بعضی از ریاضیدانان مجموعه را گردایه‌ای از اشیاء می‌نامند که دارای یک خاصیت مشترک باشند اما بعداً می‌بینیم که با این تعریف دچار (دسته، رده، توده) یک تناقض یا پارادوکس خواهیم شد به نام پارادوکس راسل. لذا مثل هندسه که مفهوم نقطه و خط را بدون آن که تعریف شوند را می‌پذیرند فقط به توصیف کارهایی که با این مفاهیم انجام می‌شود می‌پردازند ما هم مجموعه را تعریف نمی‌کنیم ولی با آوردن مثال‌هایی از آن یک استنباط شهودی از آن پیدا می‌کنیم.

در واقع اگر بخواهیم بگوییم گردایه‌ای از اشیاء که در یک شرط خاص صدق می‌کند می‌توان از آن به یک تناقض می‌رسیم فرض کنیم

$A = \{x \mid \underbrace{x \notin x}_{S(x)}\}$ بنابراین A شامل اشیایی عناصری است که متعلق به خودشان نیستند

الکن دو حالت می‌تواند رخ دهد:

۱ـ $A \in A$

۲ـ $A \notin A$

فرض کنیم $A \in A$ بنابراین باید A در خاصیت $S(x)$ صدق کند یعنی $A \notin A$ .X.

اگر $A \notin A$ لذا در شرطی که اعضای A دارند نباید صدق کند یعنی $A \in A$ که باز هم .X.

لذا تعریف که به استفاده از مجموعه بدهیم ما را به یک تناقض می‌رساند بنابراین ~~نمی~~ نمی‌توان مجموعه را تعریف کرد.

مثال:

الف) مجموعه تمام صندلی‌های این کلاس

ب) مجموعه تمام دانشجویان این دانشگاه

ج) مجموعه حروف $\{a, b, c, d\}$

د) مجموعه قوانین خداشناسی‌های دانشگاه

ه) مجموعه تمام اعداد گویا که مربعشان ۲ است

و) مجموعه تمام اعداد طبیعی

ز) مجموعه تمام اعداد حقیقی بین ۰ و ۱

۱.۱.۲ تعریف: یک مجموعه را که فقط شامل تعدادی متناهی عضو باشد مجموعهٔ متناهی می‌گویند. مجموعهٔ نامتناهی، مجموعه‌ای است که متناهی نباشد.

روشن است که الف، ب، ج، د مجموعه‌های متناهی و «ه»، «و»، «ز» مجموعه‌های نامتناهی هستند

معمولاً مجموعه‌ها را با قرار دادن اعضا شان بین دو تا آکولاد نشان می‌دهیم $\{1, 2, 5, 9, 2\}$

اما اگر عناصر یک مجموعه زیاد و نامتناهی باشند معمولاً در آن خاصیتی که صدق می‌کنند آن را با یک گزاره مثلاً $P(x)$ نشان می‌دهیم مثلاً برای ه.

$P(x) = x^2 = 2$ آنگاه

$\{x \in \mathbb{Q} \mid P(x)\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2\} =$

یعنی عناصری از $\mathbb{Q}$ که در گزاره $P(x)$ صدق می‌کنند یا $P(x) = 0 \leq x \leq 1$

$\{x \in \mathbb{R} \mid P(x)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} =$ ز

همانطور که دقت کرده‌اید مجموعه (ه) شامل هیچ عضوی نیست.

۲.۱.۲. مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد را مجموعه تهی می‌نامیم و با علامت ϕ یا $\{\}$ نشان می‌دهیم.

معمولاً از حروف بزرگ برای نمایش مجموعه‌ها و از حروف کوچک برای نمایش اعضا آن‌ها استفاده می‌کنیم.

۳.۱.۲ - اصل موضوع گسترش: دو مجموعه با هم مساوی‌اند اگر و فقط اگر دارای عناصر یکسان باشند.

اگر دو مجموعه مساوی باشند از نماد $A=B$ و اگر مساوی نباشند از نماد $A \neq B$ استفاده می‌کنیم.

به عبارت دیگر $A=B$ به معنی آن است که

$$\forall(x)\left[(x \in A) \longleftrightarrow (x \in B)\right]$$

۴.۱.۲ اگر A و B دو مجموعه باشند اگر هر عضو A، عضو B نیز باشد گوییم A ~~$A \subseteq B$~~ زیرمجموعه B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$. اگر A زیرمجموعه B باشد، B را یک ابرمجموعه A می‌نامیم. بنابراین به زبان ریاضی می‌توان نوشت

$$A \subseteq B \equiv (\forall x)\left[(x \in A) \longrightarrow (x \in B)\right]$$

روشن است که برای هر مجموعه چون A همواره داریم $A \subseteq A$.

۵.۱.۲ تذکر: اگر $A \subseteq B$ ولی $A \neq B$ در این صورت گوییم A یک زیرمجموعه سره یا یک زیرمجموعه محض از B است و می‌نویسیم $A \subset B$ یا $A \subsetneq B$. و این بدان معنی است که عناصری در B موجودند که متعلق به A نیستند ولی هر عضو A، عضو B نیز هست.

۶ قضیه مجموعه تهی، زیرمجموعه هر مجموعه است.

(۱) فرض کنیم A یک مجموعه باشد. در واقع می‌خواهیم ثابت کنیم

$$\forall x\big((x\in\phi)\to x\in A\big)$$

چون مقدم این گزاره شرطی همواره نادرست است لذا گزاره شرطی فوق همواره درست است بنابراین
شمای مقدم این گزاره همواره درست است

(۲) می‌توان از برهان خلف استفاده کنیم یعنی بگوییم فرض کنیم حکم نباشد یعنی $\phi\notin A$ در این صورت باید

$$\exists x\big[(\overset{p}{x\in\phi})\wedge \overset{q}{x\notin A}\big]$$

اما چون گزاره p نادرست است لذا این گزاره عطفی نادرست است بنابراین فرض خلف نادرست است
به عبارت دیگر باید $x\in\phi$ موجود باشد که در A نباشد که این یک تناقض است.

۷.۱.۲ قضیه: اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ آنگاه $A\subseteq C$.

برهان: باید نشان دهیم اگر x عضو دلخواهی از A آنگاه $x\in C$

$$x\in A\Rightarrow x\in C$$

$$x\in A\Rightarrow x\in B \quad (A\subseteq B)$$

$$x\in B\Rightarrow x\in C \quad (B\subseteq C)$$

$$x\in A\to x\in C \quad \text{قانون تعدی}$$

لذا ثابت شد که $A\subseteq C$.

۸.۱.۲ تمرین:

۱. اگر $A\subseteq B$، $B\subset C$ آنگاه $A\subset C$.

۲. اگر $A\subset B$، $B\subseteq C$ آنگاه $A\subset C$.

۳. اگر $A\subset B$، $B\subset C$ آنگاه $A\subset C$.

۹.۱.۲ تمرین

ثابت کنید که $(A=B)\Leftrightarrow[(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)]$

۱.۱.۲ نمادگذاری:

مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R} = \{x \mid \text{x یک عدد حقیقی است}\}$

مجموعه اعداد گویا $\mathbb{Q} = \{x \mid \text{x عدد گویا است}\}$

مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z} = \{x \mid \text{x عدد صحیح است}\}$

مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N} = \{x \mid \text{x عدد طبیعی است}\}$

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

۱۱.۱.۲: امکان دارد هر عضو یک مجموعه خود یک مجموعه باشد. مثلاً مجموعه تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه مثل A

$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$

این مجموعه را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم و به آن مجموعه توانی A می‌گوییم.

Power set

مثال:

$P(\phi) = \{\phi\}$, $P(\{a\}) = \{\{a\}, \phi\}$

$P(\{a,b\}) = \{\{a,b\}, \{a\}, \{b\}, \phi\}$

۱۲.۱.۲: قضیه: اگر A از n عضو تشکیل شده باشد، آنگاه مجموعه توانی $P(A)$ دقیقاً 2^n عضو دارد.

برهان: استدا بسط دوجمله‌ای را یادآوری می‌کنیم که داریم:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad c(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

اکنون اگر زیرمجموعه‌های صفر عضوی را در نظر بگیریم فقط تهی است که برابر $c(n,0)$ است

اگر زیرمجموعه‌های تک عضوی را در نظر بگیریم تعدادشان n است که برابر $c(n,1)$ است

تعداد " دو عضوی " " " " $\frac{n(n-1)}{2}$ خواهد بود که برابر $c(n,2)$ است.

لذا همه زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی عبارت است از

$$c(n,0) + c(n,1) + \dots + c(n,n-1) + c(n,n)$$

اگر در بسط دوجمله‌ای a و b را 1 در نظر بگیریم داریم

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} c(n,k)$$

لذا تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر 2^n است. ∎

۱۳.۱: قضیه: مجموعه همه مجموعه‌ها وجود ندارد.

برهان: فرض کنیم چنین نباشد و مجموعه همه مجموعه‌ها موجود باشد و نام آن را A می‌گذاریم. اکنون مجموعه‌ای می‌سازیم چون B که $B \notin A$. قرار می‌دهیم

$$B = \{x \in A \mid \underbrace{x \notin x}_{S(x)}\}$$

~~اگر حالت تناقض~~ فرض کنیم $B \in A$ باشد. تناقض ~~...~~ در هر صورت یا $B \in B$ یا $B \notin B$

اگر $B \in B$ باشد لذا چون $B \in A$ نیز هست پس $B \notin B$. ✗

اگر $B \notin B$ لذا چون $B \in A$ است پس باید در شرط $S(x)$ صدق نکند زیرا در غیر اینصورت باید $B \in B$. اما اگر در $S(x)$ صدق نکند یعنی $B \in B$ و باز هم این تناقض است.

لذا در هر صورت فرض اینکه $B \in A$ باشد ما را به تناقض می‌رساند پس مجموعه‌ای ساختیم چون B که در A نیست.

پس مجموعه همه مجموعه‌ها وجود ندارد. $\square$

۲.۲ جبر مجموعه‌ها
اجتماع و اشتراک

در حساب معمولاً در مورد عدد جمع، ضرب یا تفریق می‌کنند. در نظریه مجموعه‌ها، سه عمل اجتماع، اشتراک و متمم گیری به ترتیب نقش جمع، ضرب و تفریق را دارد. درباره تقسیم هم بعداً می‌بینیم که مشابه آن را روی مجموعه‌ها خواهیم داشت.

۱.۲.۲. تعریف: اجتماع دو مجموعه A و B را با $A \cup B$ نشان می‌دهیم و برابر است با مجموعه تمام عنصرهایی که حداقل به یکی از دو مجموعه A و B متعلق هستند. لذا

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B.$$

۲.۲.۲. تعریف: اشتراک دو مجموعه A و B که با $A \cap B$ نمایش می‌دهیم عبارت است از مجموعه تمام عنصرهایی که هم متعلق به A و هم متعلق به B هستند یعنی

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

$$x \in A \cap B \iff (x \in A) \wedge (x \in B)$$

اگر دو مجموعه A و B دارای اشتراک تهی باشند یعنی $A \cap B = \phi$ آنگاه A و B را مجزا نامیم.

۳.۲.۲. قضیه: فرض کنید X یک مجموعه و A و B و C زیرمجموعه‌هایی از X باشند. در این صورت داریم

الف)

$$A \cup \phi = A$$
$$A \cap X = A$$

قانون تُهی‌ها

ب)

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

قانون خودتوانی

ج)

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

قانون جابجایی

د) قانون شرکت‌پذیری

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

هـ قانون پخش‌پذیری

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

برهان:

د)

$$x \in ((A \cup B) \cup C) \iff x \in (A \cup B) \vee x \in C$$
$$\iff ((x \in A) \vee (x \in B)) \vee x \in C$$
$$\iff x \in A \vee ((x \in B) \vee x \in C) \iff x \in A \vee (x \in B \cup C) \iff x \in A \cup (B \cup C)$$

ه.

$x \in A\cup(B\cap C) \Leftrightarrow x\in A \vee (x\in B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A \vee ((x\in B)\wedge(x\in C))$

$\Leftrightarrow [(x\in A)\vee(x\in B)]\wedge[(x\in A)\vee(x\in C)]$

$\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\wedge x\in(A\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in((A\cup B)\cap(A\cup C))$

$\Rightarrow A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

۳.۲: مجموعه‌های متمم

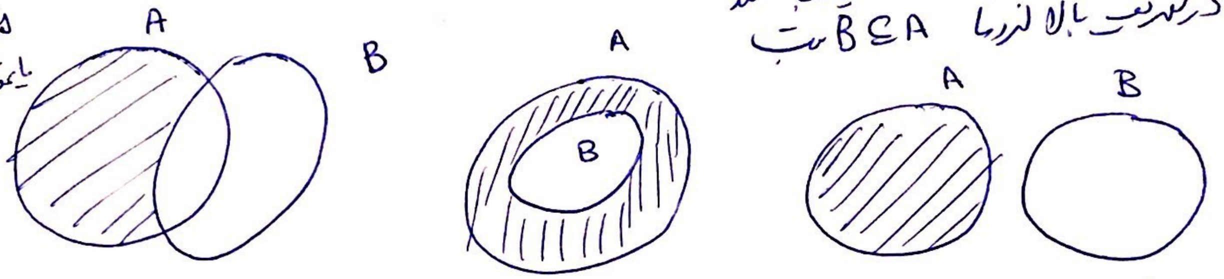
۳.۳.۲ تعریف: فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند. متمم B نسبت به A مجموعهٔ A−B است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$A-B=\{x\in A \mid x\notin B\}$

A−B را تفاضل A و B نیز نامند

در تعریف بالا لزوماً $B\subseteq A$ نیست

نمودار ون
یا نمودار اویلر

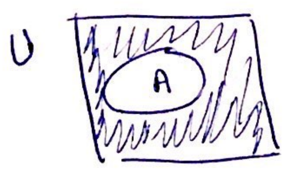


مثال: فرض کنید $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{c,d,e,f\}$

$A-B=\{a,b\}$ $\qquad A-(A\cap B)=\{a,b\}$

$A\cap B=\{c,d\}$

همانطور که قبلاً اشاره کردیم در حالت کلی مجموعهٔ همه مجموعه‌ها وجود ندارد اما نسبت به جنس مجموعه‌ای که داریم درباره آن صحبت می‌کنیم می‌توان یک عالم سخن را مجموعهٔ جامع یا مرجع در نظر گرفت در اینصورت اگر مجموعهٔ مرجع یا عالم سخن را مثلاً با U نمایش دهیم در اینصورت به مجموعهٔ U−A متمم A گوئیم و آن را با A' نمایش می‌دهیم که اگر آن را با نمودار ون نمایش دهیم به این صورت خواهد بود.



(۲۶)

۲.۳.۲ قضیه: نشان دهید $A-B=A\cap B'$

برهان

$x\in A\cap B' \iff (x\in A)\wedge(x\in B')$

$\iff (x\in A)\wedge(x\in(U-B))$

$\iff (x\in A)\wedge[(x\in U)\wedge(x\notin B)]$

$\iff [(x\in A)\wedge(x\in U)]\wedge x\notin B$

$\iff (x\in A\cap U)\wedge x\notin B$

$\iff (x\in A)\wedge(x\notin B)$

$\iff x\in A-B$ بنابر تعریف تساوی دو مجموعه

لذا

$A\cap B'=A-B$

۳.۳.۲ قضیه: فرض کنید A و B دو مجموعه هستند دراین صورت ثابت کنید

الف) $(A')'=A$،

ب)

ج) $\phi'=U$ و $U'=\phi$،

د) $A\cap A'=\phi$ و $A\cup A'=U$،

ذ) $A\subseteq B$ اگر و تنها اگر $B'\subseteq A'$،

برهان: اثباتهای قسمت الف تا ج بدیهی است

ذ)

$A\subseteq B \overset{\text{تعریف}}{\equiv} (x\in A)\to(x\in B)$

قانون عکس نقیض $\equiv x\notin B\to x\notin A$

$\equiv x\in B'\to x\in A'$

$\equiv B'\subseteq A'$

لذا ثابت کردیم که $A\subseteq B$ اگر و تنها اگر $B'\subseteq A'$

$(A')'=U-(A')=U-(U-A)=\{x\in U \mid x\notin(U-A)\}$

$=\{x\in U\mid x\in A\}=A$

۴.۳.۲ قضیه دمورگان: فرض کنید A و B دو مجموعه دلخواه باشند در این صورت داریم:

الف) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

ب) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

برهان الف)

$x\in(A\cup B)'\equiv \sim(x\in(A\cup B))$

$\equiv\sim(x\in A\vee x\in B)$

$\equiv x\notin A\wedge x\notin B\equiv x\in A'\wedge x\in B'\equiv x\in A'\cap B'\to(A\cup B)'=A'\cap B'$