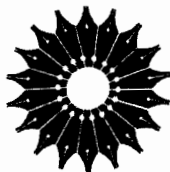


شوونگ تی. لین و یو-فنگ. لین



نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربردهای آن

ترجمهٔ عمید رسولیان



نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربردهای آن

شوونگ تی. لین و یو-فنگ. لین

ترجمهٔ عمید رسولیان

مرکز نشر دانشگاهی

مرکز نشر دانشگاهی
۴۶۲

ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۵۳



Set Theory with Applications
Shwu Yeng T. Lin and You-Feng Lin
Second Edition
Mariner Publishing Company, Inc., 1981

نظریه مجموعه‌ها و کاربردهای آن
تألیف شوینگ تی. لین، یو - فنگ. لین
ترجمه عمید رسولیان
ویراسته دکتر منوچهر وصال
ناظر چاپ: خشایار نصیری منش
مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۶۸
چاپ سیزدهم ۱۳۸۸
تعداد ۸۰۰۰
لیتوگرافی: وسمه
چاپ و صحافی: نقش نیزار
۶۰۰ تومان
حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Lin, ShwuYeng T.	لین، شوینگ تی.
نظریه مجموعه‌ها و کاربردهای آن / شوینگ تی. لین و یو - فنگ. لین؛ ترجمه عمید رسولیان. - تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.	
پنج، ۲۳۷ ص.؛ مصور، جدول. - (مرکز نشر دانشگاهی، ۴۶۲. ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۵۳)	
ISBN 978-964-01-0462-0	
فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیبا.	
Set theory with applications.	عنوان اصلی:
	واژه‌نامه.
	کتابنامه: ص. [۲۱۸] - ۲۱۹.
	چاپ سیزدهم: ۱۳۸۸.
۱. نظریه مجموعه‌ها. الف. لین، یو - فنگ، ۱۹۴۲.	
ب. Lin, You-Feng	رسولیان، عمید، مترجم. ج. مرکز نشر دانشگاهی. د. عنوان.
۵۱۱/۳۲۲	QAY28/J9509
	۱۳۶۸
۶۸-۱۲۱۱	کتابخانه ملی ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار
۳	۱. منطق مقدماتی
۳	۱. گزاره‌ها و رابطهای آنها
۸	۲. سه نماد دیگر
۱۲	۳. راستگو، استلزام، و هم‌ارزی
۱۹	۴. تناقض
۲۱	۵. استدلال قیاسی
۲۳	۶. قواعد تصویر
۲۶	۷. برهان درستی
۳۲	۸. استقرای ریاضی
۳۷	۲. مفهوم مجموعه
۳۷	۱. مجموعه‌ها و زیرمجموعه‌ها
۴۰	۲. تصریح مجموعه‌ها
۴۲	۳. اجتماع و اشتراك
۴۷	۴. مجموعه‌های متمم
۵۲	۵. نمودار ون
۵۵	۶. خانواده‌های مجموعه‌های اندیس‌دار
۶۱	۷. پارادوکس راسل
۶۲	۸. يك توضیح تاریخی

صفحه	عنوان
۶۴	۳. رابطه و تابع
۶۲	۱. حاصلضرب دکارتی دو مجموعه
۶۸	۲. رابطه
۷۳	۳. افراز و رابطه هم‌ارزی
۷۷	۴. تابع
۸۲	۵. نگاره و نگاره وارون مجموعه
۸۸	۶. تابع يك به يك، پوششی، و دوسویی
۹۲	۷. ترکیب توابع
۹۷	۴. جبر بول و کاربردهای آن
۹۷	۱. جبر بول
۱۰۲	۲. تابع بول
۱۰۶	۳. تابع بول و درجه‌های منطقی
۱۱۰	۴. کاربرد مدارهای کامپیوتررقمی
۱۱۶	۵. مجموعه‌های شمارای نامتناهی و ناشمارا
۱۱۶	۱. مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
۱۲۲	۲. هم‌توانی مجموعه‌ها
۱۲۵	۳. چند مثال و ویژگی مجموعه‌های شمارای نامتناهی
۱۲۸	۴. مجموعه‌های ناشمارا
۱۳۱	۶. اعداد اصلی و حساب اعداد اصلی
۱۳۱	۱. مفهوم اعداد اصلی
۱۳۳	۲. مرتب کردن اعداد اصلی - قضیه شرودر-برنشتاین
۱۳۶	۳. عدد اصلی يك مجموعه توانی - قضیه کانتور
۱۳۸	۴. جمع اعداد اصلی
۱۴۰	۵. ضرب اعداد اصلی
۱۴۲	۶. توان اعداد اصلی
۱۴۶	۷. چند مثال دیگر از حساب اعداد اصلی
۱۴۸	۸. فرضیه پیوستار و تممیم آن
۱۵۱	۷. اصل انتخاب و برخی از صورتهای هم‌ارز آن
۱۵۱	۱. مقدمه
۱۵۲	۲. اصل ماکسیمال هاوسدورف

صفحه	عنوان
۱۵۷	۳. لم تسورن
۱۶۰	۴. اصل خوشترتیبی
۱۶۲	۵. اصل استقرای ترامتاهی
۱۶۵	۶. نکات تاریخی
۱۶۸	۸. اعداد ترتیبی و حساب ترتیبی
۱۶۸	۱. مفهوم اعداد ترتیبی
۱۷۰	۲. ترتیب اعداد ترتیبی
۱۷۳	۳. جمع اعداد ترتیبی
۱۷۶	۴. ضرب اعداد ترتیبی
۱۷۹	۵. نتیجه
۱۸۲	ضمیمه
۱۸۲	اصول موضوع پتانو برای اعداد طبیعی
۱۸۶	پاسخ مسائل برگزیده
۲۱۵	فهرست نمادها
۲۱۸	مراجع برگزیده
۲۲۰	واژه‌نامه انگلیسی-فارسی
۲۲۵	واژه‌نامه فارسی-انگلیسی
۲۳۰	فهرست راهنما

پیشگفتار

بیش از شش سال است که از زمان چاپ کتاب مقدمه‌ای بر نظریهٔ شهودی مجموعه‌ها، چاپ قبلی این کتاب، می‌گذرد. در طول این چند سال برنامه‌های ریاضی تغییرهای زیادی کرده و ریاضیات جدید خواهان بیشتری پیدا کرده‌است. در آن زمان در دانشگاه فلوریدای جنوبی فقط دانشجویان ریاضی در کلاسهای درس نظریهٔ مجموعه‌ها حاضر می‌شدند، اما در حال حاضر نیمی از کلاس از دانشجویان دانشکدهٔ مهندسی، بخصوص مهندسی برق و علوم کامپیوتر تشکیل می‌شود. بنابراین تصمیم گرفتیم که فصل جدیدی دربارهٔ جبر بول و کاربرد آن در طراحی مدارهای منطقی و شبکه‌های مدارهای رقمی به کتاب بیفزاییم. این فصل جدید ارائهٔ کاربردهای عملی فصلهای قبلی منطقی و مجموعه‌هاست. چون این فصل به هیچ‌گونه زمینهٔ قبلی مهندسی نیاز ندارد، امید داریم که دانشجوی غیرمهندسی نیز از دیدن کاربردهای موضوعی نظری، همچون نظریهٔ مجموعه‌ها، در تکنولوژی مدرن لذت ببرد.

بدون شك، ارائهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها در چارچوب يك دستگاه اصل موضوعی از نظر دقت، بیشتر رضایتبخش است. اما هیچ نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها نیست که برای دانشجویان مبتدی آسان باشد. بدین جهت روش شهودی را برای عرضهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها به کار بردیم.

به علاوه سعی کرده‌ایم آنچه را که برای فهم مطالب لازم است در کتاب بیاوریم. مواد اصلی لازم برای دانشجویانی که می‌خواهند درسهایی نظیر جبر مدرن، آنالیز، توپولوژی و غیره بخوانند، در کتاب آورده شده‌است. اما امید داریم که خود مباحث کتاب، نظر معلم و دانشجو را جلب کند. جای تأسف خواهد بود اگر مشاهده شود که به موضوع جالبی همچون نظریهٔ مجموعه‌ها، تنها به عنوان پیشنیازی برای درسهای دیگر توجه می‌شود. یکی از پیشنیازهای این کتاب، آشنایی با ریاضیات دبیرستانی است، اما به مهارت زیاد در ریاضیات نیازی نیست. بهتر است خواننده با يك درس حساب دیفرانسیل و انتگرال سه ماهه یا نیمساله آشنا شده باشد. تمام کتاب برای تدریس يك درس نیمساله یا دو درس سه ماهه در نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها در سطح دورهٔ کارشناسی نوشته شده‌است. با حذف چند فصل آخر، می‌توان از کتاب برای يك درس سه ماهه یا يك درس کوتاه تابستانی

استفاده کرد. پیشنهاد می‌کنیم که مدرس، دو فصل اول را سریعتر و فصلهای بعدی را با تأمل بیشتری تدریس کند. در چاپ جدید اشتباههای کوچک و برخی ابهامات موجود در چاپ قبلی، تصحیح شده است. مسائل تمرینی بیشتری در سطحی وسیعتر و متنوعتر نیز آورده شده است.*

شوونگ-تی-لین

یوفنگ-لین

تمپل تراس، فلوریدا



منطق مقدماتی

در این فصل مطالبی از منطق ریاضی که برای مطالعه بقیه فصلهای کتاب لازم است، ارائه می‌شود.

۱. گزاره‌ها و رابطهای آنها

منطق بررسی اصول و روشهایی است که برای تمیز دادن استدلالهای درست از استدلالهای نادرست به کار می‌روند. منظور ما از این فصل مقدماتی منطق این است که خواننده را به اصول و روشهایی که در هر مرحلهٔ برهان به کار می‌رود آشنا سازیم. منطق با لغت «گزاره» که به معنای خاصی به کار می‌رود شروع می‌شود. منظور ما از گزاره، يك جملهٔ خبری است که یا راست است یا دروغ ولی هم راست و هم دروغ نیست. لازم نیست بدانیم که گزاره راست است یا دروغ، بلکه فقط کافی است بدانیم که تنها دارای یکی از این دو ارزش* است. معمولاً به آسانی دیده می‌شود که گزاره راست است یا دروغ، اما در بعضی موارد تعیین ارزش گزاره مستلزم کمی دقت است، و در مواردی ممکن است تعیین ارزش آن محال باشد. مثالهای زیرین مطلب را روشن می‌کنند.

* اگر گزاره راست باشد می‌گوییم ارزش راستی گزاره راست و اگر دروغ باشد می‌گوییم ارزش راستی آن دروغ است.م.

- مثال ۱.** هر يك از عبارتهای زیر يك گزاره است.
- (الف) شیراز شهری در استان فارس است.
- (ب) $2 + 1 = 5$ برابر ۵ است.
- (ج) صد و پنجمین رقم اعشاری $\sqrt{3}$ ، ۷ است.
- (د) ماه از پنیر آبی به وجود آمده است.
- (ه) درمریخ جاندار با شعور وجود ندارد.
- (و) هوا بارانی است.

بدیهی است که (الف) راست است درحالی که (ب) و (د) دروغ هستند. ارزشهای (ج) و (ه) (راست یا دروغ) بر ما معلوم نیستند، اما این تنها به خاطر نقص معلومات ماست. پس (ج) و (ه) نیز گزاره هستند. درستی یا نادرستی (و) به وضعیت هوا در زمانی که این گزاره گفته می شود بستگی دارد.

مثال ۲. هیچ کدام از عبارتهای زیر گزاره نیستند، زیرا این سؤال که آنها راست یا دروغ هستند مفهومی ندارد.

- (الف) به مهمانی ما بیا!
- (ب) آسمان غنی است.
- (ج) حال شما چگونه است؟
- (د) خدا حافظ، عزیزم.

گزاره‌هایی که در مثال ۱ عنوان شدند، همگی گزاره‌های ساده هستند. ترکیبی از چند گزاره ساده را يك گزاره مرکب می نامیم. به عنوان مثال « $2 + 1 = 5$ برابر ۵ است و صد و پنجمین رقم اعشاری $\sqrt{3}$ ، ۷ است» يك گزاره مرکب است.

در جبر با استفاده از حروف برای نمایش اعداد آشنا شده ایم. در منطق حروف نظیر p, q, r, \dots را برای نمایش گزاره‌ها به کار می بریم. حرفی مانند p ممکن است نمایانگر يك گزاره ساده یا يك گزاره مرکب باشد، ولی معمولاً ما حروف P, Q, R, \dots را به عنوان گزاره مرکب به کار می بریم، مگر اینکه خلاف آن را قید کنیم.

برای ربط دادن گزاره‌هایی چون p, q, r, \dots جهت تشکیل گزاره‌های مرکب راه‌های زیادی وجود دارد. ما فقط پنج رابط را که زیاد به کار می روند در اینجا ذکر می کنیم. این پنج رابط عبارت اند از: (الف) «نفي» که با \sim نمایش داده می شود؛ (ب) «و» که با \wedge نمایش داده می شود؛ (ج) «یا» که با \vee نمایش داده می شود؛ (د) «اگر... آنگاه...» که با \rightarrow نمایش داده می شود؛ و بالاخره (ه) «... اگر و تنها اگر...» که با \leftrightarrow نمایش داده می شود.

در این بخش دو نماد \sim و \wedge را بررسی کرده و مطالعه نمادهای \vee, \rightarrow و \leftrightarrow را به بخش بعد موکول می کنیم.

تزاره‌ها و رابطهای آنها ۵

گیریم p يك گزاره باشد. آنگاه گزاره $p \sim$ ، بخوانید «نفي p » یا «نقیض p »، راست است هر گاه p دروغ باشد و دروغ است هر گاه p راست باشد. به عنوان مثال، اگر p گزاره «این درس آسانی است» باشد، نقیض آن، $p \sim$ ، گزاره «این درس آسانی نیست» یا «چنین نیست که این درس آسانی است» می باشد.

ارزش $p \sim$ بستگی به ارزش p دارد. مناسب است که این بستگی را به صورت جدول ادزش زیر نمایش دهیم

جدول ۱

p	$\sim p$
T	F
F	T

که در آن « T » و « F » به ترتیب به جای «راست» و «دروغ» آمده اند*. درستون اول جدول ۱ دو ارزش ممکن یعنی T یا F را برای گزاره p نوشته ایم. هر ردیف جدول ارزش بیانگر حالتی است که باید در نظر گرفته شود و البته در این وضعیت بسیار ساده تنها دو حالت وجود دارد. با استفاده از ردیفهای جدول ۱ می بینیم که اگر p راست باشد $p \sim$ دروغ است و اگر p دروغ باشد، $p \sim$ راست است. بنابراین جدول ۱ ارزش گزاره $p \sim$ را در هر حالت بیان می کند.

تعریف ۱. رابط \wedge را می توان بین هر دو گزاره p و q قرارداد و گزاره مرکب $p \wedge q$ را، که ارزشهای آن در جدول ارزش زیر آمده اند، تشکیل داد.

جدول ۲

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

عبارت $p \wedge q$ را « p و q » یا «ترکیب عطفی p و q » می خوانیم. مثلاً، گیریم p گزاره «آسمان آبی است» و q گزاره «گل سرخ قرمز است» باشد. آنگاه گزاره عطفی

* T حرف اول true به معنی راست و F حرف اول false به معنی دروغ است. م.

$p \wedge q$ ، عبارت «آسمان آبی است، و گل سرخ قرمز است» می باشد. در یک گزاره مرکب، مانند $p \wedge q$ ، هر یک از گزاره های p و q را مؤلفه گویند. مؤلفه ممکن است یک گزاره ساده یا یک گزاره مرکب باشد. در گزاره های مرکب با دو مؤلفه، مانند $p \wedge q$ ، حداکثر $2(=2 \times 2)$ حالت وجود دارد، که حالت های منطقی یا امکان های منطقی نامیده می شوند و در زیر می آیند:

- (۱) p راست و q راست است.
- (۲) p راست و q دروغ است.
- (۳) p دروغ و q راست است.
- (۴) p دروغ و q دروغ است.

در واقع، هر یک از چهار حالت بالا، یک ردیف از جدول ۲ است. ستون آخر جدول، ارزش $p \wedge q$ را بیان می کند. با کمی دقت دیده می شود که گزاره $p \wedge q$ فقط در یک حالت راست است و آن وقتی است که p و q هر دو راست باشند، و در بقیه موارد، $p \wedge q$ دروغ است. خواننده متفکر متوجه می شود که این جدول ارزش در واقع روش استفاده عاقل «و» در محاورات روزانه را منعکس می کند. با استفاده از جدول های ۱ و ۲ می توان ارزش گزاره های پیچیده تری را که فقط شامل رابط های \sim و \wedge هستند، معلوم کرد.

مثال ۳. جدول ارزش گزاره مرکب زیر را تشکیل دهید.

$$\sim [(\sim p) \wedge (\sim q)]$$

حل:

جدول ۳

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	$\sim [(\sim p) \wedge (\sim q)]$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	F
مرحله		۱	۱	۲	۳

اگر روش تشکیل جدول بالا برای شما واضح نیست به توضیحی که در زیر می آید توجه کنید: عنوان های ستون ها طوری انتخاب شده اند که گزاره مرکب مورد نظر به تدریج از

گزاره‌ها و رابطهای آنها ۷

مؤلفه‌هایش (درستون آخر) ساخته شود. در درستون اول صرفاً ارزشهای p و q را برای تمام حالات ممکن ثبت کرده‌ایم. سپس با استفاده از جدول ۱ در ستونهای سوم و چهارم ارزشهای $p \sim$ و $q \sim$ متناظر را نوشته‌ایم. در ستون پنجم، ارزشهای ترکیب عطفی عنوانهای ستونهای سوم و چهارم را با استفاده از جدول ۲ نمایانده‌ایم و بالاخره درستون ششم ارزشهای نقیض ستون پنجم، یعنی ارزشهای گزاره اصلی $[(\sim p) \wedge (\sim q)] \sim$ را با استفاده از جدول ۱ نوشته‌ایم. اکنون به دانشجو توصیه می‌شود از گزاره مرکب اخیر صورت برداشته کتاب را ببندد و سعی کند این جدول ارزش را خود تشکیل دهد.

در گزاره مثال بالا، $[(\sim p) \wedge (\sim q)] \sim$ ، از پرانتزها و گروه‌ها برای نشان دادن ترتیبی که رابطها عمل می‌کنند استفاده شده‌است. اغلب هر جا امکان داشته باشد بر طبق قراردادهایی برای ساده کردن عبارات، پرانتزها یا گروه‌ها را حذف می‌کنیم. قرارداد معمول آن است که توافق کنیم \sim مقدم بر \wedge است؛ یعنی رابط \sim اول بر گزاره تأثیر کند بعد \wedge . به عنوان مثال عبارت $(\sim p) \wedge (\sim q)$ را می‌توان به صورت ساده $\sim p \wedge \sim q$ نوشت.

تمرین ۱۰۱

در مسائل ۱ تا ۱۰ يك جمله فارسی داده شده‌است. در هر کدام تعیین کنید که جمله، گزاره است یا نیست.

۱. در ۷ ژانویه ۱۴۴۲، در قسمتی از فلوریدا برف بارید.
۲. ارسطو پاهاى پهنی داشت.
۳. جامعه‌گرایی خطاست.
۴. ثروتمندترین مرد دنیا آقای هانت درتگزاس است.
۵. علی و جمشید بچه‌های خوبی هستند.
۶. این ماشین چقدر می‌ارزد؟
۷. روی چمن راه نروید.
۸. همیشه کمر بند صندلی‌تان را محکم ببندید.
۹. عدد $۳۷ + ۲۹۸۷۶۵۴۳۲۱$ يك عدد اول است.
۱۰. بعضی از موسیقیهای شوپن را بتهوون نوشته‌است.
۱۱. در گزاره‌های مسائل ۱ تا ۱۰ ارزش‌آنهايي را که می‌دانید راست است با T نشان دهید و جلوی آنهايي که تعیین ارزششان برایتان مشکل است D بگذارید.

در مسائل ۱۲ تا ۱۹ ارزش راستی هر يك از گزاره‌ها را تعیین کنید. برای آنهايي که دو حالت دارند. از جدول ۱ و برای آنهايي که چهار حالت دارند از جدول ۲ استفاده کنید.

۱۲. $\sim(\sim p)$ ۱۳. $\sim[(\sim(\sim p))]$
۱۴. $p \wedge p$ ۱۵. $\sim(p \wedge \sim p)$

$$\sim p \wedge q \cdot 17 \qquad p \wedge \sim q \cdot 16$$

$$\sim (p \wedge q) \cdot 19 \qquad (p \wedge q) \wedge \sim p \cdot 18$$

۲۰. در يك گزاره مرکب که شامل سه گزاره p ، q و r است، چند حالت منطقی باید در نظر گرفت؟ اگر چهار گزاره متفاوت داشته باشیم، چند حالت؟ در حالت کلی وقتی n گزاره متفاوت داریم، چند حالت لازم است؟

۲۱. در شکل زیر کوشش شده است حالت‌های مختلف يك گزاره مرکب متشکل از سه مؤلفه p ، q و r تنظیم شود. این جدول ناتمام را کامل کنید:

p	q	r
T	T	
T	T	F
T		T
T		F
	T	T
	T	F
F	F	
	F	F

در مسائل ۲۲ تا ۲۵، جدول ارزش هر يك از گزاره‌ها را تشکیل دهید. از الگوی تمرین ۲۱ برای تشخیص حالت‌های مختلف استفاده کنید.

$$p \wedge (q \wedge r) \cdot 23 \qquad (p \wedge q) \wedge r \cdot 22$$

$$\sim q \wedge (r \wedge p) \cdot 25 \qquad (p \wedge \sim q) \wedge r \cdot 24$$

۲. سه نماد دیگر

در زبان فارسی وقتی در جمله «بسا» به کار می‌رود ابهامی وجود دارد. گزاره «من درجه فوق لیسانس یا دکترا را دریافت می‌کنم.» به این معنی است که امکان دارد گوینده هردو درجه فوق لیسانس و دکترا را دریافت کند*. اما در گزاره دیگر «من بسا مریم یا ناهید ازدواج می‌کنم.» حرف «یا» این معنی را می‌دهد که فقط یکی از این دو دختر انتخاب خواهد شد**. در ریاضیات و منطق، نمی‌توانیم ابهام داشته باشیم. لذا باید روی معنی حرف «یا» تصمیم بگیریم.

* این «یا» را «یا» شمولی (inclusive disjunction) یا «یا» منطقی می‌نامند.م.
 ** این «یا» را «یا» مانع جمع (exclusive disjunction) می‌نامند.م.

سه نماد دیگر ۹

تعریف ۲. رابط \vee مابین دو گزاره p و q برای تشکیل گزاره مرکب $p \vee q$ به کار می رود. ارزشهای راستی $p \vee q$ در جدول ۴ نشان داده شده است. بنا بر این رابط \vee به معنای «یا» شمول» یعنی به معنای «یا» در گزاره اول بالاست.

جدول ۴

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

نماد $p \vee q$ را « p یا q » یا «ترکیب فصلی p و q » بخوانید. توجه کنید که ترکیب عطفی p و q راست است تنها وقتی که هر دو مؤلفه راست باشند (جدول ۲)، در صورتی که ترکیب فصلی دروغ است تنها وقتی که هر دو مؤلفه دروغ باشند (جدول ۴).
بامقایسه جدولهای ارزش گزاره‌های $(\sim p \wedge \sim q)$ و $p \vee q$ (جدولهای ۳ و ۴) درمی یابیم که ستون آخر هر دو جدول $T T T F$ است، پس ارزش راستی این دو گزاره در هر یک از چهار امکان منطقی، یکی است. تعیین اینکه برخی گزاره‌ها در هر حالت یک ارزش راستی دارند، بخش مهمی از منطق است. در واقع، منطق این گزاره‌ها را صورتهای مختلف یک گزاره به حساب می آورد.

تعریف ۳. هر گاه دو گزاره P و Q ، ساده یا مرکب، برای تمام حالت‌های منطقی دارای یک ارزش باشند، گزاره P را هم‌ارز منطقی یا به طور ساده هم‌ارز Q گویند، و می نویسند $P \equiv Q$.

خلاصه کلام اینکه، دو گزاره منطقاً هم‌ارز هستند هر گاه دارای یک جدول ارزش باشند. بنا بر این داریم

$$p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$$

اگرچه تا جایی که به منطق مربوط می شود، دو گزاره منطقاً هم‌ارزیکی در نظر گرفته می شوند، اما گزاره ساده تر « p یا q » را بر گزاره هم‌ارز پیچیده ترش، یعنی «چنین نیست که نه p و نه q » ترجیح می دهیم.

تعریف ۴. رابط \rightarrow را که مابین دو گزاره p و q برای تشکیل گزاره مرکب $p \rightarrow q$ به کار برده می شود، رابط شرطی می گویند (بخوانید: «اگر p آنگاه q). بنا بر تعریف،

گزاره $p \rightarrow q$ هم‌ارز گزاره $(p \wedge \sim q) \sim$ است. ارزشهای راستی $p \rightarrow q$ در جدول ۵ نشان داده شده است.

جدول ۵

حالت	p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \rightarrow q [\equiv \sim(p \wedge \sim q)]$
۱	T	T	F	F	T
۲	T	F	T	T	F
۳	F	T	F	F	T
۴	F	F	T	F	T

بجاست به يك انگیزه تعريف ۴ اشاره كنيم. فرض كنيد p گزاره «هوا بارانی است» و q گزاره «من به شما سواری خواهم داد» باشد. حال گزاره مرکب $p \rightarrow q$ ، «اگر هوا بارانی باشد آنگاه من به شما سواری خواهم داد» است. از نظر ما این قرار (گزاره) چه وقت نقض شده (دروغ) است؟ بدیهی است که این قرار فقط درحالی که هوا بارانی باشد (p راست باشد) و من به شما سواری ندهم (q دروغ باشد) نقض شده است. یعنی ستون نهایی جدول ارزش $p \rightarrow q$ ، بجز درحالت ۲، باید در هر حالتی ارزش « T » داشته باشد. برطبق تعريف ۴، معنی گزاره شرطی $p \rightarrow q$ اساساً با طرزی که گزاره «اگر p آنگاه q » را در محاوره عادی به کار می‌بریم اختلاف دارد. در زبان عادی جمله‌ای به صورت «اگر p آنگاه q » به این مفهوم است که هر وقت p راست باشد، q راست است. بنابراین حالتی که p دروغ است مطرح نمی‌شوند.

به عنوان مثال، گزاره «اگر لینکلن، گرانت را می‌کشت، آنگاه جفرسون اولین رئیس جمهور بود» بی‌معنی تلقی می‌شود، زیرا هر دو مؤلفه دروغ هستند. در نتیجه در گفتگوی عادی ارزش راستی چنین گزاره‌ای بررسی نمی‌شود. اما برای ایجاد يك زبان صوری، منطقیون خواستار تعیین ارزشهای راستی گزاره $p \rightarrow q$ در هر چهار حالت منطقی هستند، هر چند که در زبان عادی دو حالت از چهار حالت فوق بی‌معنی به نظر برسد. بنابراین گوناگونی، که به موقع خود گفته خواهند شد، منطقیون روی تعریفی که در بالا آمد، توافق کرده‌اند. بنابراین در زبان صوری گزاره $p \rightarrow q$ در هر حالتی راست است بجز حالت ۲ (به جدول ۵ نگاه کنید). به عنوان يك نتیجه این توافق می‌توانیم چند قضیه ساده و مفید را ثابت کنیم. بدون يك چنین قراردادی، برهانها یا خیلی مشکل می‌شدند یا زشت و ناهنجار.^۲

اکنون آخرین رابط از این پنج رابط را که در صورت قضیه‌های ریاضی به فراوانی به کار می‌رود، معرفی می‌کنیم.

۱. در مقابل «زبان عادی» منطق را يك زبان صوری می‌گویند.

۲. مثلاً قضیه‌های ۱ و ۷ فصل ۲ را ببینید.

تعریف ۵. رابط \leftrightarrow را رابط دوشروطی می‌گویند. ترکیب دوشروطی دو گزاره p و q را به صورت $p \leftrightarrow q$ می‌نویسند (بخوانید: p اگر و فقط اگر q یا بخوانید: p اگر و تنها اگر q). گزاره $p \leftrightarrow q$ هم‌ارز گزاره مرکب $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ تعریف می‌شود. ارزشهای راستی $p \leftrightarrow q$ در جدول ۶ آمده است.

مثال ۴. جدول ارزش $p \leftrightarrow q$ را بیابید.

حل: با روشی که پیش از این شرح دادیم جدول ۶ را تشکیل می‌دهیم.

جدول ۶

حالت	p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q [\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$
۱	T	T	T	T	T
۲	T	F	F	T	F
۳	F	T	T	F	F
۴	F	F	T	T	T
مرحله			۱	۱	۲

از جدول ارزش بالا درمی‌یابیم که $p \leftrightarrow q$ وقتی راست است که هر دو مؤلفه راست یا هر دو مؤلفه دروغ باشند. در هر حالت دیگر (حالت‌های ۲ و ۳) گزاره $p \leftrightarrow q$ دروغ است.

تمرین ۲.۱

در مسائل ۱ تا ۱۲ جدول ارزش گزاره‌های داده شده را تشکیل دهید.

- ۰.۱ $p \vee \sim p$
- ۰.۲ $\sim(p \vee \sim p)$
- ۰.۳ $\sim(\sim p \vee \sim p)$
- ۰.۴ $\sim p \vee q$
- ۰.۵ $(\sim q) \rightarrow (\sim p)$
- ۰.۶ $q \leftrightarrow p$
- ۰.۷ $p \wedge (q \vee r)$
- ۰.۸ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- ۰.۹ $p \vee (q \wedge r)$
- ۰.۱۰ $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- ۰.۱۱ $(p \vee q) \vee r$
- ۰.۱۲ $p \vee (q \vee r)$

۱۳. آیا گزاره $(\sim p) \rightarrow (\sim q)$ (مسئله ۵) هم‌ارز منطقی گزاره $p \rightarrow q$ است؟

۱۴. آیا گزاره $\sim p \vee q$ (مسئله ۴) هم‌ارز منطقی گزاره $p \rightarrow q$ است؟

۱۵. از گزاره‌های مسائل ۱ تا ۱۲، تعیین کنید کدام گزاره‌ها هم‌ارز منطقی هستند.

۱۶. در هر يك از حالتهاي زير، گزاره‌هاي مركب داده شده را با استفاده از نمادهاي پيشنهادي، به صورت نمادي برگردانيد.

(الف) چنين نيست كه من با شما مهربان نيستم. (M)

(ب) اگر او فرشته است، آنگاه او دو بال دارد. (F, B)

(ج) قيمت گوشت افزايش مي يابيد اگر و تنها اگر عرضه از تقاضاي گوشت کمتر باشد. (G, A)

(د) ياكشاورزان قيمتها را پايين خواهند آورد يا دولت دخالت خواهد كرد. (K, D)

(ه) اگر صادرات گوشت افزايش يابد يا پرورش دام زياد نشود، آنگاه قيمتها افزايش مي يابد. (S, P, G)

۱۷. گاهي اوقات $q \rightarrow p$ را « p فقط اگر q » مي خوانند. هر يك از گزاره‌هاي زيرين را با استفاده از نمادهاي پيشنهادي به صورت نمادي برگردانيد.

(الف) در اين درس موفق خواهم شد فقط اگر مجدانه تلاش كنم. (D, T)

(ب) تابع مشتق دارد فقط اگر پيوسته باشد. (M, P)

(ج) ماتريس وارون دارد فقط اگر دترمينانش صفر نباشد. (V, D)

(د) ماتريس دترمينان ناصفر دارد فقط اگر وارون داشته باشد. (D, V)

۱۸. در گزاره $p \rightarrow q$ ، p را شرط كافي براي q و q را شرط لازم براي p مي گويند. گزاره‌هاي (الف) تا (د) مسئله ۱۷ را نخست با بيان «شرط كافي» و سپس با بيان «شرط لازم» بنويسيد.

۱۹. آيا $(p \leftrightarrow q) \sim (p \leftrightarrow \sim q)$ هم ارز منطقي $q \leftrightarrow \sim p$ است؟ نتيجه گيري خود را با تشكيل جدول ارزش بيانيد.

۲۰. آيا $q \leftrightarrow \sim p$ هم ارز منطقي $q \leftrightarrow p$ است؟

۲۱. اگر يك گزاره مركب متشكل از گزاره‌هاي ساده p و q ، جدول ارزش زير را داشته باشد:

p	q	?
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

آيا مي توانيد گزاره مركب را بيانيد؟

۳. راستگو، استلزام، و هم‌ارزي

حال جدول ارزش گزاره $p \vee \sim p$ را بررسي مي كنيم:

راستگو، استلزام، و هم‌ارزی ۱۳

جدول ۷

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

می‌بینیم که گزاره $p \vee \sim p$ در هر حالت، یعنی در تمام حالات منطقی، راست است. این نوع گزاره مهم شایسته نامی ویژه است.

تعریف ۶. گزاره‌ای که در تمام حالات منطقی راست باشد، راستگو نامیده می‌شود.

دو گزاره مرکب یا ساده P و Q مفروض‌اند. اگر گزاره شرطی $P \rightarrow Q$ راستگو باشد، استلزام نامیده می‌شود و آن را با $P \Rightarrow Q$ نمایش می‌دهند (بخوانید: P مستلزم Q است یا بگویید Q از P لازم می‌آید). بنابراین، گزاره‌های شرطی زیر همگی استلزام هستند:

$$p \rightarrow p \quad (۱)$$

$$p \wedge q \rightarrow q \wedge p \quad (۲)$$

$$p \rightarrow p \wedge p \quad (۳)$$

$$p \wedge q \rightarrow q \quad (۴)$$

در منطق یا ریاضیات، «قضایا» به معنی گزاره‌های راست هستند، و «برهان» (قضیه) اثبات درستی آن است.

قضیه ۱. گیریم p و q دو گزاره هستند. آنگاه قوانین زیر برقرارند:

(الف) قانون جمع: $p \Rightarrow p \vee q$

(ب) قانون اختصار: $p \wedge q \Rightarrow p$ ، $p \wedge q \Rightarrow q$

(ج) رفع مؤلفه: $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$

برهان. برهان (الف) و (ب) را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. جدول ارزش اختصاری برای $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$ در زیر آمده است:

۱. فرض می‌کنیم که \wedge و \vee بیش از \rightarrow و \leftrightarrow گزاره‌ها را بهم ربط می‌دهند و بنا بر این مثلاً به جای $(p \vee q) \rightarrow p$ می‌نویسیم $p \rightarrow p \vee q$. به پاراگراف آخر بخش ۱ نیز رجوع کنید.

جدول ۸

$(p$	\vee	$q)$	\wedge	$\sim p$	\rightarrow	q	
T	T	T	F	F	T	T	
T	T	F	F	F	T	F	
F	T	T	T	T	T	T	
F	F	F	F	T	T	F	
مرحله	۱	۲	۱	۳	۲	۴	۱

حال طرز تشکیل جدول ارزش اختصاری را در چند کلمه شرح می‌دهیم، ارزشهای راستی در جدول ۸، ستون به ستون، به ترتیب شماره‌هایی که در پایین جدول دیده می‌شوند، نوشته شده است. در یک جدول ارزش اختصاری، نخست ارزشهای راستی را مستقیماً زیر هر مؤلفه، و سپس زیر رابطها می‌نویسیم. با این روش هم در زمان و هم در جا صرفه‌جویی می‌شود.

اکنون، به برهان قضیه بازمی‌گردیم. چون مرحلهٔ آخری (مرحله چهارم) در جدول ۸، فقط شامل T است، گزارهٔ شرطی $q \rightarrow p \vee (p \wedge q)$ یک استلزام است.

گزارهٔ دوشروطی $P \leftrightarrow Q$ اگر راستگو باشد، هم‌ادزی نامیده می‌شود و آن را با $P \leftrightarrow Q$ نشان می‌دهند (بخوانید: P هم‌ارز Q است).
از تعریف ۵ و جدول ۶، دیده می‌شود که $P \leftrightarrow Q$ ، به شرط اینکه در تمام حالات منطقی، P و Q یک ارزش راستی داشته باشند، و برعکس، اگر P و Q در تمام حالات منطقی یک ارزش راستی داشته باشند، آنگاه $P \leftrightarrow Q$. پس، بنا بر تعریف ۳، $P \leftrightarrow Q$ و $P \equiv Q$ یک معنی دارند، و از این رو می‌توانیم \leftrightarrow و \equiv را به جای یکدیگر به کار ببریم.

قضیهٔ ۲. گیریم p و q دو گزاره هستند. آنگاه

(الف) قانون نفی مضاعف: $p \equiv \sim(\sim p)$

(ب) قانون جابه‌جایی: $p \wedge q \equiv q \wedge p$ ، $p \vee q \equiv q \vee p$

(ج) قانون خودتوانی: $p \wedge p \equiv p$ ، $p \vee p \equiv p$

(د) قانون عکس نقیض: $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$

برهان. برهان قسمتهای (الف)، (ب)، (ج) را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم و اصول برهان (د) را ارائه می‌دهیم.

راستگو، استلزام، و هم‌ارزی ۱۵

جدول ارزش اختصاری زیر برای گزاره دو شرطی $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$:

جدول ۹

$(p \rightarrow q)$			\leftrightarrow	$(\sim q \rightarrow \sim p)$			
T	T	T	T	F	T	F	
T	F	F	T	T	F	F	
F	T	T	T	F	T	T	
F	T	F	T	T	T	T	
مرحله	۱	۲	۱	۲	۲	۳	۲

نشان می‌دهد که $p \rightarrow q$ با $\sim q \rightarrow \sim p$ هم‌ارز است. قضیهٔ زیر، که به اوگامتس دمورگن* منسوب است، یکی از مناسبترین ابزارها در منطق است.

قضیهٔ ۳. (قانون دمورگن). فرض کنیم p و q دو گزاره هستند. آنگاه

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

و

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

پوهان. ما قسمت اول این قضیه را ثابت می‌کنیم و قسمت دیگر را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. جدول ارزش اختصاری زیر برای گزاره دو شرطی $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$:

جدول ۱۰

\sim	$(p \wedge q)$			\leftrightarrow	$(\sim p \vee \sim q)$			
F	T	T	T	T	F	F	F	
T	T	F	F	T	F	T	T	
T	F	F	T	T	T	T	F	
T	F	F	F	T	T	T	T	
مرحله	۳	۱	۲	۱	۲	۲	۳	۲

* Augustus De Morgan (1806-1871)

نشان می‌دهد که $\sim(p \wedge q)$ با $p \vee \sim q$ هم‌ارز است.

قضیه ۴. فرض می‌کنیم p ، q و r گزاره هستند. آنگاه

(الف) قانون شرکتپذیری: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

(ب) قانون پخشپذیری: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(ج) قانون تعدی: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow r)$

پرهان. برهانهای قانونهای شرکتپذیری و دومین قانون پخشپذیری را به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

ثابت کنیم که $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. چون این گزاره شامل سه مؤلفه است، $2^3 = 8$ حالت منطقی وجود دارد که باید در نظر گرفته شود. جدول ارزش زیر نشان می‌دهد که $p \wedge (q \vee r)$ و $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ در هر یک از هشت حالت منطقی دارای یک ارزش راستی هستند. بنابراین $p \wedge (q \vee r)$ و $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ هم‌ارزند.

جدول ۱۱

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

برای صرفه‌جویی در وقت و جا، یک جدول ارزش اختصاری همان‌گونه که در جدول ۸ معرفی شد، برای $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ تشکیل می‌دهیم.

جدول ۱۲

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	
<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	
<i>T</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	
<i>T</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	
<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	
<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	
<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	
<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	
مرحله	۱	۲	۱	۳	۱	۲	۱	۲	۱	۲	۱

چون مرحله آخر (مرحله ۴) فقط از *T* تشکیل شده است، قانون تعدی ثابت شده است.

بنابر قانون شرکتپذیری، در

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \quad \text{و} \quad (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

به پرانتزها نیازی نیست و عبارات $p \vee q \vee r$ و $p \wedge q \wedge r$ و همچنین $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$ و $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$ معانی مشخصی دارند.

قضیه ۵. گیریم p, q, r ، و s گزاره هستند. آنگاه

(الف) قیاس ذالوجهین موجب

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee s)$$

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge s)$$

(ب) قیاس ذالوجهین منفی

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow (\sim q \vee \sim s \rightarrow \sim p \vee \sim r)$$

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow (\sim q \wedge \sim s \rightarrow \sim p \wedge \sim r)$$

برهان. برهان قضیه ۵ به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

قضیه ۶. فرض کنید p و q گزاره هستند. آنگاه

$$\begin{aligned} \text{(الف) قیاس استثنایی} \quad & (p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q \\ \text{(ب) قیاس دفع} \quad & (p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p \\ \text{(ج) برهان خلف} \quad & (p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q \rightarrow q \wedge \sim p) \end{aligned}$$

برهان. برهان به عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود.

تمرین ۳.۱

۱. قسمتهای (الف) و (ب) قضیه ۱ را ثابت کنید.
۲. قسمتهای (الف)، (ب) و (ج) قضیه ۲ را ثابت کنید.
۳. ثابت کنید که $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$.
۴. قسمت (الف) قضیه ۴ را ثابت کنید.
۵. ثابت کنید که $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.
۶. ثابت کنید که $(p \rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$.
۷. ثابت کنید که $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$.
۸. با استفاده از قانون دموورگن، نفیض گزاره «این تابع مشتق دارد یا من احمق هستم» را به زبان عادی بنویسید.
۹. قوانین دموورگن را برای سه مؤلفه ثابت کنید

$$\sim(p \wedge q \wedge r) \equiv \sim p \vee \sim q \vee \sim r \quad \text{(الف)}$$

$$\sim(p \vee q \vee r) \equiv \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r \quad \text{(ب)}$$

۱۰. آیا، بدون اثبات، می توانید قوانین دموورگن را برای n مؤلفه تعمیم دهید؟ مسئله ۹ برای $n=3$ را ببینید.
۱۱. قوانین جذب زیر را ثابت کنید.

$$p \wedge (p \vee r) \equiv p \quad \text{(الف)}$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p \quad \text{(ب)}$$

۱۲. قضیه ۵ را ثابت کنید.

۱۳. قضیه ۶ را ثابت کنید.

۱۴. آیا $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$ هم ارز منطقی $(p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$ است؟

۱۵. آیا $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ هم ارز منطقی $(p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$ است؟

۱۶. ثابت کنید $(p \vee q) \wedge \sim p$ هم ارز منطقی $q \wedge \sim p$ است.

تناقض ۱۹

۱۷. ثابت کنید $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ هم‌ارز منطقی $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ است.

در هر کدام از مسائل ۱۸ الی ۲۰، ستون آخر جدول ارزش يك گزاره مجهول شامل گزاره‌های ساده p ، q و r داده شده‌است. این گزاره مرکب را پیدا کنید.

۱۸. $\cdot T F F F F F F F$

۱۹. $\cdot F F F F F F F T$

۲۰. $\cdot T F F F F F F T$. [راهنمایی: اگر X و Y به ترتیب جوابهای مسائل ۱۸ و ۱۹ باشند آنگاه $X \vee Y$ جواب مسئله ۲۰ است].

۴. تناقض

برخلاف راستگوها، گزاره‌هایی وجود دارند که ارزش راستی آنها برای هر امکان منطقی دروغ است. چنین گزاره‌هایی را تناقض می‌گویند. به‌عنوان مثال، $p \wedge \sim p$ يك تناقض است.

بدیهی است که اگر t يك راستگو باشد، آنگاه $t \sim$ يك تناقض است و برعکس، اگر c يك تناقض باشد آنگاه $c \sim$ يك راستگو است.

قضیه ۷. گیریم t ، c و p به ترتیب يك راستگو، يك تناقض و يك گزاره دلخواه باشند. آنگاه

(الف) $p \wedge t \iff p$

$p \vee t \iff t$

(ب) $p \vee c \iff p$

$p \wedge c \iff c$

(ج) $p \implies t$ و $c \implies p$

پروهان. (الف) جدول ارزش زیر برای $p \wedge t \iff p$ ، نشان می‌دهد که $p \wedge t$ با p هم‌ارز است.

جدول ۱۳

p	\wedge	t	\iff	p
T	T	T	T	T
F	F	T	T	F
مرحله ۱	۲	۱	۳	۱

هم ارزی $t \leftrightarrow p \vee t$ به طریقی مشابه ثابت می‌شود.
 (ب) از جدول ارزش زیر درمی‌یابیم که گزاره شرطی $p \leftrightarrow p \vee c$ يك راستگو است و از این رو، $p \leftrightarrow p \vee c$.

جدول ۱۴

p	v	c	\leftrightarrow	p
T	T	F	T	T
F	F	F	T	F
مرحله ۱	۲	۱	۳	۱

برهان $c \leftrightarrow p \wedge c$ به طریقی مشابه ثابت می‌شود.
 (ج) جدولهای ارزش $p \rightarrow t$ و $c \rightarrow p$ نشان می‌دهند که $p \rightarrow t$ و $c \rightarrow p$ راستگو هستند.

جدول ۱۵

c	\rightarrow	p	p	\rightarrow	t
F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T

از این به بعد، نماد c با اندیس یا به‌تنهایی یا برای تناقض و نماد t با اندیس یا به‌تنهایی یا برای راستگو به کار می‌بریم.

تمرین ۴.۱

۱. ثابت کنید که $t \leftrightarrow p \vee t$ و $c \leftrightarrow p \wedge c$.

۲. ثابت کنید که $c \leftrightarrow \sim t$ و $\sim c \leftrightarrow t$.

۳. برهان خلف زیر را ثابت کنید

$$(p \wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$$

۴. ثابت کنید که $c \leftrightarrow p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$.

۵. ثابت کنید که برای هر گزاره r ، $(p \rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$.

۶. جواد ادعا می‌کرد که هر کاری را می‌تواند انجام دهد. آیا جواد می‌توانست شیشی بسازد که نتواند آن را بلند کند.

۵. استدلال قیاسی

چنانکه در مثالهای ۵ تا ۷ نشان داده شده است، هفده قانونی که در قضیه‌های اول تا ششم خلاصه شده‌اند برای بررسی هم‌ارزیها و استنتاج‌های منطقی ابزارهای بسیار مفیدی هستند. این ۱۷ قانون را «قاعده‌های استنتاج» می‌نامیم. باید توجه داشت که این قاعده‌ها فقط به‌عنوان یک مرجع مناسب انتخاب شده‌اند و از یکدیگر مستقل نیستند. مثلاً، قانون عکس نقیض را، همان‌گونه که در مثال زیر دیده می‌شود، می‌توان با استفاده از قوانین دیگر و تعاریف مربوط با «استدلال قیاسی» به‌دست آورد.

مثال ۵. قانون عکس نقیض، $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$ ، را با استفاده از تعاریف مربوط و دیگر قاعده‌های استنتاج ثابت کنید.

$$\text{حل:} \quad (p \rightarrow q) \equiv \sim(p \wedge \sim q) \quad \text{تعریف ۴}$$

$$\equiv \sim(\sim q \wedge p) \quad \text{قانون جابه‌جایی}$$

$$\equiv \sim[\sim q \wedge \sim(\sim p)] \quad \text{قانون نفی مضاعف}$$

$$\equiv (\sim q \rightarrow \sim p) \quad \text{تعریف ۴}$$

از این‌رو، بنا بر قانون تعدی، $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$.

روش برهان مثال ۵ را، روش قیاسی یا استدلال قیاسی می‌گویند. این روش البته با روش استفاده از جدول ارزش متفاوت است.

به‌طور کلی، در استدلال قیاسی به‌کار بردن اصول موضوعه، تعاریف و قضایایی که قبلاً گفته شده باشند و همچنین قواعد استنتاج، جایز است.

مثال ۶. قانون رفع مؤلفه را با استدلال قیاسی ثابت کنید.

$$\text{حل:} \quad (p \vee q) \wedge \sim p \equiv \sim p \wedge (p \vee q) \quad \text{قانون جابه‌جایی}$$

$$\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q) \quad \text{قانون پخشپذیری}$$

$$\equiv c \vee (\sim p \wedge q) \quad \sim p \wedge p \equiv c$$

$$\equiv (\sim p \wedge q) \vee c \quad \text{قانون جابه‌جایی}$$

$$\equiv \sim p \wedge q \quad \text{قضیه ۷ (ب)}$$

$$\Rightarrow q \quad \text{قانون اختصار}$$

و بالاخره بنا بر قانون تعدی داریم: $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$.

مثال ۷. قانون تفکیک دو مقدم را با استدلال قیاسی ثابت کنید:

$$(p \wedge q \rightarrow r) \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

حل: $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \equiv [p \rightarrow \sim(q \wedge \sim r)]$ تعریف ۲

تعریف ۴، قانون نفی مضاعف $\equiv \sim[p \wedge (q \wedge \sim r)]$

قانون شرکت پذیری $\equiv \sim[(p \wedge q) \wedge \sim r]$

تعریف ۴ $\equiv (p \wedge q \rightarrow r)$

از این رو، $(p \wedge q \rightarrow r) \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$.

مثال ۸. با استفاده از استدلال قیاسی ثابت کنید که

$$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \equiv (p \wedge q \rightarrow r \vee s)$$

حل:

تعریف ۴ $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \equiv \sim(p \wedge \sim r) \vee \sim(q \wedge \sim s)$

قانون دمورگن و نفی مضاعف $\equiv (\sim p \vee r) \vee (\sim q \vee s)$

قانون جا به جایی و شرکت پذیری $\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (r \vee s)$

قانون دمورگن و نفی مضاعف $\equiv \sim[(p \wedge q) \wedge \sim(r \vee s)]$

تعریف ۴ $\equiv (p \wedge q \rightarrow r \vee s)$

چرا به کاربردن استدلال قیاسی را بر استفاده از جدول ارزش ترجیح می‌دهیم، از مقایسه زیر دیده می‌شود: برای بررسی هم‌ارزی در مثال ۸، به روش جدول ارزش، باید یک جدول بسیار بزرگ با $2^4 (= 16)$ حالت تشکیل دهیم (مسئله ۲۵ تمرین ۱۰.۱ یا مسئله ۱۲ تمرین ۳.۱ را ببینید) و حال آنکه در بالا این هم‌ارزی را با استدلال قیاسی در پنج مرحله کوتاه، نشان داده‌ایم.

تمرین ۵.۱

راستگوهای زیر را به روش قیاسی ثابت کنید.

۱. قیاس استثنایی $p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$

۲. قیاس دفع $\sim q \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow \sim p$

۳. برهان خلف $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q \rightarrow c)$

۴. رفع مؤلفه $(p \vee q \vee r) \wedge \sim r \wedge \sim q \Rightarrow p$

- ۵. قضیه \vee (ج): $c \Rightarrow p$
- ۶. $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow p \wedge q)$
- ۷. $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q \rightarrow q)$
- ۸. $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$
- ۹. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q \rightarrow r)$
- ۱۰. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$
- ۱۱. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \Leftrightarrow \sim p$
- ۱۲. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q \vee r)$
- ۱۳. $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$
- ۱۴. $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow q$
- ۱۵. $(p \rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$
- ۱۶. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow r)$
- ۱۷. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge p \Rightarrow r$
- ۱۸. $[(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)] \wedge p \Rightarrow q \vee r$
- ۱۹. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge p \Rightarrow q \vee r$
- ۲۰. $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\sim q \vee \sim s) \Rightarrow \sim p \vee \sim r$

۶. قواعد تسویر

در هر بحثی، یک عالم سخن یا حوزه سخن بخصوصی را در نظر داریم، یعنی دسته‌ای از اشیاء که خواصشان مورد نظر هستند. مثلاً، در گزاره «تمام انسانها، میرا هستند»، عالم، دسته تمام انسانها است. با این مفهوم عالم، گزاره «تمام انسانها، میرا هستند» را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

برای تمام x های درعالم، x میراست.

عبارت «برای تمام x های درعالم» را سود عمومی گویند و آن را با $(\forall x)$ نشان می‌دهند. جمله « x میراست» چیزی درباره x می‌گوید که ما آن را با $p(x)$ نشان می‌دهیم. با به‌کار بردن این علامتها عبارت «تمام انسانها میرا هستند»، به صورت زیر درمی‌آید

$$(\forall x)(p(x))$$

حال، گزاره «بعضی از انسانها میرا هستند» را در نظر بگیرید. در اینجا عالم (یا حوزه سخن) هنوز همانند گزاره قبلی است. با در نظر داشتن این عالم، می‌توانیم گزاره «بعضی از انسانها میرا هستند» را به صورت‌های زیر بیاوریم.

حداقل یک فرد وجود دارد که میراست.

حداقل يك x وجود دارد به قسمی که x میراست.

و یا

حداقل يك x وجود دارد به قسمی که $p(x)$.

عبارت «حداقل يك x وجود دارد به قسمی که» را سود وجودی گویند و آن را با $(\exists x)$ نمایش می‌دهند. با این علامت جدید می‌توان گزاره «بعضی از انسانها میرا هستند» را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(\exists x)(p(x))$$

در حالت کلی، فرض کنید که يك حوزه سخن U و يك گزاره کلی $p(x)$ داریم، که آن را گزاره نما می‌نامیم و در آن «متغیر» x ، در U تغییر می‌کند. حال $(\forall x)(p(x))$ بیان می‌کند که برای هر x در U ، گزاره $p(x)$ درباره x راست است، و $(\exists x)(p(x))$ به این معنی است که حداقل يك x در U وجود دارد که برای آن $p(x)$ راست است.

در ریاضیات مقدماتی، معمولاً برای اختصار، از سورها صرف نظر می‌شود. مثلاً، در جبر دبیرستانی عبارت $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ به این معنی است که «برای هر عدد حقیقی x ، $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ ». در ریاضیات، «برای هر» و «برای تمام» به يك معنی هستند و هر دو را با \forall نشان می‌دهند؛ و «برای بعضی» همان معنی «وجود دارد» را می‌دهد که با \exists نمایش داده می‌شود. در عبارتهایی که کمتر رسمی هستند گاهی سورها را بعد از گزاره می‌آوریم. مثلاً، گزاره « $f(x) = 0$ برای تمام x ها» دقیقاً به معنی « $(\forall x)(f(x) = 0)$ » است.

در منطق و در ریاضیات، نقیض گزاره $p(x)$ برای هر x (در U) راست است، یعنی $\sim [(\forall x)(p(x))]$ ، به مفهوم «حداقل يك x (در U) وجود دارد که برای آن $p(x)$ دروغ است»، $(\exists x)(\sim p(x))$ ، در نظر گرفته می‌شود.

همچنین، $\sim [(\exists x)(p(x))]$ به معنی «هیچ x ای (در U) وجود ندارد که برای آن $p(x)$ راست باشد» یا به عبارت دیگر، « $p(x)$ برای تمام x ها (در U) دروغ است» یا $(\forall x)(\sim p(x))$ در نظر گرفته می‌شود. در زیر خلاصه می‌کنیم.

قاعده نقیض سور. اگر فرض کنیم $p(x)$ يك گزاره نما، یعنی يك گزاره در باره يك شیء نامشخص x در يك عالم مفروض باشد، آنگاه،

$$\sim [(\forall x)(p(x))] \equiv (\exists x)(\sim p(x))$$

و

$$\sim [(\exists x)(p(x))] \equiv (\forall x)(\sim p(x))$$

نماد « \equiv » را برای نشان دادن اینکه دو گزاره مسور دوطرف \equiv از نظر منطق يك

گزاره به حساب می‌آیند* به کار برده‌ایم. در بخش بعد خواهیم دید که این نماد را برای هم‌ارزیهای منطقی نیز به کار می‌بریم و این دو تعبیر نماد \equiv با هم سازگار هستند.

برای درک بهتر گزاره‌های مسور $(\forall x)(p(x))$ و $(\exists x)(p(x))$ ، حالتی را که در آن حوزه سخن از تعدادی متناهی متغیر a_1, a_2, \dots, a_n تشکیل شده است، در نظر می‌گیریم. آنگاه چون $(\forall x)(p(x))$ به این معنی است که $p(x)$ برای هر متغیر a_1, a_2, \dots, a_n راست است، گزاره $(\forall x)(p(x))$ راست است اگر و تنها اگر عطف

$$p(a_1), p(a_2), p(a_3), \dots, p(a_n)$$

راست باشد. بنابراین

$$(\forall x)(p(x)) \text{ به معنی } p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \dots \wedge p(a_n) \text{ است.}$$

همچنین،

$$(\exists x)(p(x)) \text{ به معنی } p(a_1) \vee p(a_2) \vee \dots \vee p(a_n) \text{ است.}$$

بنابراین، قاعده نقیض سور را می‌توان به عنوان یک تعمیم قانون دموورگن در نظر گرفت (قضیه ۳).

مثال ۹. کدام یک از گزاره‌های زیر هم‌ارز نفی گزاره «همه مارها سمی هستند» است؟

- (الف) هیچ ماری سمی نیست.
- (ب) بعضی از مارها سمی هستند.
- (ج) بعضی از مارها سمی نیستند.

حل: حوزه سخن U ، خانواده تمام مارها است. فرض کنیم $p(x)$ گزاره نمای، x سمی است، باشد، (که در آن متغیر x در U تغییر می‌کند). گزاره «تمام مارها سمی هستند»، به صورت $(\forall x)(p(x))$ نوشته می‌شود. بنا بر قاعده نقیض سور، $(\forall x)(p(x)) \sim$ هم‌ارز $(\exists x)(\sim p(x))$ است، که بیانگر «بعضی از مارها سمی نیستند» می‌باشد.

تمرین ۶.۱

۱. با استفاده از یک سور، گزاره «معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ جواب دارد» منتخب از جبر مقدماتی را به زبان منطقی بنویسید. حوزه سخن در اینجا چیست؟
۲. اتحاد $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ «جبر مقدماتی را با استفاده از سور به زبان منطقی برگردانید. حوزه سخن در اینجا چیست؟
۳. یک تعمیم قانون دموورگن در زیر آمده است:

$$\sim(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \equiv \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \dots \vee \sim p_n \quad (\text{الف})$$

* یعنی از نظر منطقی بین این دو گزاره مسور تمایزی قائل نمی‌شویم. م.

$$\sim(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \equiv \sim p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \dots \wedge \sim p_n \quad (\text{ب})$$

بسا به کار بردن سورهای مناسب و حوزه سخن مناسب، این عبارات را به زبان منطقی برگردانید. حوزه سخن در اینجا چیست؟

۴. گزاره هم‌ارز نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را با استفاده از قاعده نقیض سور بیابید.
(الف) تمام مارها خزنده هستند.

(ب) بعضی اسبها رام هستند.

(ج) بعضی از ریاضیدانان خوش مشرب نیستند.

(د) تمام دانشجویان یا باهوش هستند یا پرکار.

(ه) هیچ کودکی حيله گر نیست.

۵. حوزه سخن را برای هر یک از پنج گزاره مسئله ۴ بیابید.
۶. از

$$\sim[(\forall x)(q(x))] \equiv (\exists x)(\sim q(x))$$

نتیجه بگیرید

$$\sim[(\exists x)(p(x))] \equiv (\forall x)(\sim(p(x)))$$

۷. از

$$\sim[(\exists x)(q(x))] \equiv (\forall x)(\sim q(x))$$

نتیجه بگیرید

$$\sim[(\forall x)(p(x))] \equiv (\exists x)(\sim p(x))$$

۸. ثابت کنید که

$$\sim[(\exists x)(\sim(q(x)))] \equiv (\forall x)(q(x)) \quad \text{و} \quad \sim[(\forall x)(\sim q(x))] \equiv (\exists x)(q(x))$$

[راهنمایی: قاعده نقیض سور را به کار برید].

۷. برهان درستی

یکی از مهمترین وظایف يك منطق‌دان آزمون حکمهاست. يك حکم تصدیق این است که گزاره‌ای به نام نتیجه از گزاره‌های دیگری به نام مفروضات یا مقدمات، به دست می‌آید. يك حکم ددست تلقی می‌شود هر گاه ترکیب عطفی مفروضات نتیجه را ایجاد کند. مثلاً آنچه در زیر می‌آید، يك حکم است که در آن چهار گزاره اول مفروضات هستند و گزاره آخر نتیجه است.

اگر او پزشکی می‌خواند، آنگاه درآمد خوبی در انتظارش است.

اگر به تحصیل هنر می‌پردازد، آنگاه زندگانی خوبی در انتظارش است.

اگر درآمد خوبی در انتظارش است یا زندگانی خوبی در انتظارش است، شهریه‌ای

که به کالج می‌پردازد به هدر نرفته است.

شهریه کالج او به هدر رفته است.

بنابراین، او نه پزشکی می خواند نه هنر تحصیل می کند.

این حکم را می توان به صورت نمادی زیر نوشت:

- ف ۱. $P \rightarrow D$ (ف = فرض، $P =$ او پزشکی می خواند، $D =$ درآمد خوبی درانتظارش است)
- ف ۲. $T \rightarrow Z$ ($T =$ به تحصیل هنر می پردازد، $Z =$ زندگانی خوبی درانتظارش است)
- ف ۳. $DVZ \rightarrow \sim S$ ($S =$ شهریه کالج او به هدر رفته است)
- ف ۴. S

$\therefore \sim P \wedge \sim T$ ن

اثبات درستی این حکم با جدول ارزش مستلزم يك جدول $3 \times 2^3 = 24$ سطری است. اما راه دیگر اثبات درستی این حکم این است که با به کار بردن قواعد استنتاج، در چند مرحله کوتاه نتیجه را از مفروضات به دست آوریم.

از فرضهای ف ۳ و ف ۴، (یعنی از $DVZ \rightarrow \sim S$) بر طبق قانون قیاس دفع، (DVZ) نتیجه می شود و این بنا بر قانون دمورگن با $\sim D \wedge \sim Z$ هم ارز است. بنا بر قانون اختصار از $\sim D \wedge \sim Z$ درستی $\sim D$ (و همچنین $\sim Z$) را نتیجه می گیریم. از ف ۱ (یعنی از $P \rightarrow D$) و $\sim D$ درستی $\sim P$ را به دست می آوریم همچنین از ف ۲ (یعنی از $T \rightarrow Z$) و $\sim Z$ ، درستی $\sim T$ را نتیجه می گیریم. بالاخره، عطف $\sim P$ و $\sim T$ ، $\sim P \wedge \sim T$ را نتیجه می دهد. در این برهان، قواعد استنتاج قیاس دفع، قانون دمورگن و قانون اختصار به کار گرفته شده اند.

يك روش صوری و مختصرتر برای بیان این برهان درستی این است که فرضها و گزاره های را که از فرضها نتیجه می شوند در يك طرف بنویسیم و در هر مرحله توجیه آن را کنارش ذکر کنیم. در هر مرحله «توجیه» مشخص می کند که گزاره این مرحله از کدام گزاره های قبلی و چه قواعد استنتاجی به دست آمده است. برای آسانی مراجعه، بهتر است که فرضها و گزاره های منتج از آنها را شماره گذاری کرده و نتیجه را در سمت چپ آخرین فرض بنویسیم و آن را با خطی کج مانند / از فرض جدا کنیم تا مشخص شود که گزاره های قبل از آن همگی مفروضات هستند. برهان صوری درستی حکم بالا را می توان به صورت زیر نوشت

- (ف) $P \rightarrow D$.۱
- (ف) $T \rightarrow Z$.۲
- (ف) $DVZ \rightarrow \sim S$.۳
- (ف/ن) $S / \therefore \sim P \wedge \sim T$.۴

۴، ۳، قیاس دفع	۰۵. $\sim(DVZ)$
۵، دمورگن	۰۶. $\sim D \wedge \sim Z$
۶، اختصار	۰۷. $\sim D$
۶، اختصار	۰۸. $\sim Z$
۷، ۱، قیاس دفع	۰۹. $\sim P$
۸، ۲، قیاس دفع	۱۰. $\sim T$
۹، ۱۰، قانون عطف	۱۱. $\sim P \wedge \sim T$

در مرحله ۱۱ بالا، حکم زیر را که به روشنی معتبر است و قانون عطف خواننده می‌شود، به کار برده‌ایم:

۱ ف	p
۲ ف	q
<hr/>	
ن	$\therefore p \wedge q$

برهان دستنی خودی يك حکم داده‌شده، دنباله‌ای از گزاره‌هاست که هر يك یا فرض حکم است یا از گزاره‌های قبلی با حکمی که درستی آن شناخته شده به دست آمده است، و به نتیجه حکم ختم می‌شود.

مثال ۰۱۰. برای حکم زیر يك برهان درستی صوری بیاورید. نمادهای پیشنهادی را به کار برید.

یا واجدی به ریاست هیئت مدیره انتخاب شده‌است (W) یا هدایت و لطفی به معاونت هیئت مدیره انتخاب شده‌اند (H, L). اگر یا واجدی به ریاست هیئت مدیره انتخاب شود یا هدایت به معاونت هیئت مدیره انتخاب شود، آنگاه داود اعتراض خواهد کرد (D). بنابراین، یا واجدی به ریاست هیئت مدیره انتخاب شده‌است یا داود اعتراض کرده است.

برهان. $W \vee (H \wedge L)$.۱

$W \vee H \rightarrow D / \therefore W \vee D$.۲

۱، پخشپذیری $(W \vee H) \wedge (W \vee L)$.۳

۳، اختصار $W \vee H$.۴

۲، ۴، قیاس استثنایی D .۵

۵، جمع $D \vee W$.۶

۶، جا به جایی $W \vee D$.۷

برهان درستی ۲۹

يك روش ديگر برهان، روش برهان غيرمستقيم، يا روش برهان خلف است. در اين روش براي اثبات درستی يك حكم مفروض، نقيض نتيجه را به مفروضات حكم می افزايم و سپس يك تناقض به دست می آوريم؛ با به دست آوردن تناقض، برهان كامل می شود.

مثال ۰۱۱. يك برهان غيرمستقيم برای درستی حكم زير بياوريد.

$$p \vee q \rightarrow r$$

$$s \rightarrow p \wedge u$$

$$q \vee s / \therefore r$$

	برهان.
	۰۱. $p \vee q \rightarrow r$
	۰۲. $s \rightarrow p \wedge u$
	۰۳. $q \vee s / \therefore r$
برهان خلف	۰۴. $\sim r$
۱، ۴، قیاس دفع	۰۵. $\sim(p \vee q)$
۵، دموورگن	۰۶. $\sim p \wedge \sim q$
۶، اختصار	۰۷. $\sim p$
۶، اختصار	۰۸. $\sim q$
۳، ۸، رفع مؤلفه	۰۹. s
۲، ۹، قیاس استثنایی	۰۱۰. $p \wedge u$
۱۰، اختصار	۰۱۱. p
۷، ۱۱، قانون عطف	۰۱۲. $p \wedge \sim p$

گزاره $p \wedge \sim p$ در مرحله ۱۲ يك تناقض است؛ پس برهان غيرمستقيم درستی كامل است.

درمقابل «برهان غيرمستقيم» برهان درستی صوری را كه قبلاً به آن اشاره كردیم می توان «برهان مستقيم» نامید. دريك برهان ریاضی می توان يك برهان مستقيم یا يك برهان غيرمستقيم به كار برد. انتخاب روش برهان برای يك حكم ریاضی مفروض، بستگی دارد به سلیقه و تناسب روش با حكم.

تمرین ۷۰۱

هر يك از مسائل ۱ تا ۴ يك برهان درستی صوری حکمی است كه در مسئله مشخص شده است. برای هر خط كه درست نیست، دلیل بياوريد.

$ \begin{aligned} & p \wedge q \rightarrow r && \cdot ۲ \\ & (p \rightarrow r) \rightarrow s \\ & \sim q \vee u / \therefore q \rightarrow s \wedge u \\ & q \wedge p \rightarrow r \\ & q \rightarrow (p \rightarrow r) \\ & q \rightarrow s \\ & \sim q \vee s \\ & (\sim q \vee s) \wedge (\sim q \vee u) \\ & \sim q \vee (s \wedge u) \\ & q \rightarrow s \wedge u \\ & \sim p \wedge s \wedge \sim (\sim p \wedge q) && \cdot ۲ \\ & p \vee q \vee (r \wedge s) / \therefore \sim p \wedge r \\ & \sim p \wedge s \\ & \sim p \\ & p \vee [q \vee (r \wedge s)] \\ & q \vee (r \wedge s) \\ & (q \vee r) \wedge (q \vee s) \\ & q \vee r \\ & \sim p \wedge (q \vee r) \\ & (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r) \\ & (\sim p \wedge s) \wedge \sim (\sim p \wedge q) \\ & \sim (\sim p \wedge q) \\ & \sim p \wedge r \end{aligned} $	$ \begin{aligned} & p \vee q \rightarrow r \wedge s && \cdot ۱ \\ & \sim r / \therefore \sim q \\ & \sim r \vee \sim s \\ & \sim (r \wedge s) \\ & \sim (p \vee q) \\ & \sim p \wedge \sim q \\ & \sim q \\ \\ & p \wedge (q \vee s) && \cdot ۳ \\ & p \rightarrow (s \rightarrow u) \\ & p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ & \sim r / \therefore u \\ & p \wedge s \rightarrow u \\ & p \wedge q \rightarrow r \\ & (p \wedge q) \vee (p \wedge s) \\ & (p \wedge q \rightarrow r) \wedge (p \wedge s \rightarrow u) \\ & (p \wedge q) \vee (p \wedge s) \rightarrow r \vee u \\ & r \vee u \\ & u \end{aligned} $
---	--

برای هر يك از حکمهای زیر يك برهان مستقیم یا يك برهان غیرمستقیم درستی بیاورید.

$ \begin{aligned} & B \vee (C \rightarrow E) && \cdot ۶ \\ & B \rightarrow D \\ & \sim D \rightarrow (E \rightarrow A) \end{aligned} $	$ \begin{aligned} & A \vee (B \wedge C) && \cdot ۵ \\ & B \rightarrow D \\ & C \rightarrow E \end{aligned} $
--	--

برهان درستی ۳۱

$$\sim D / \therefore C \rightarrow A$$

$$D \wedge E \rightarrow F$$

$$\sim A / \therefore F$$

$$A \vee B$$

$$\cdot ۸ \quad (A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow D \wedge E) \quad \cdot ۷$$

$$\sim B \vee C / \therefore A \vee C$$

$$A \wedge C / \therefore E \vee F$$

$$A \wedge B \rightarrow C$$

$$\cdot ۱۰ \quad B \vee C \rightarrow B \wedge A \quad \cdot ۹$$

$$(A \rightarrow C) \rightarrow D$$

$$\sim B / \therefore \sim C$$

$$\sim B \vee E / \therefore B \rightarrow D \wedge E$$

در برهانهای حکمهای زیر، از علامتهای پیشنهادی استفاده کنید.

۱۱. اگر جمعیت به سرعت افزایش یابد و تولید ثابت بماند، آنگاه قیمتها بالا می‌روند. اگر قیمتها بالا روند آنگاه دولت قیمتها را کنترل خواهد کرد. اگر من ثروتمند باشم آنگاه نگران افزایش قیمتها نیستم. چنین نیست که من ثروتمند نیستم. یا دولت قیمتها را کنترل نمی‌کند یا من نگران افزایش قیمتها هستم. بنا براین، چنین نیست که جمعیت به سرعت افزایش می‌یابد و تولید ثابت می‌ماند. (جمعیت به سرعت افزایش می‌یابد و تولید ثابت می‌ماند = P . قیمتها بالا می‌روند = R . دولت قیمتها را کنترل خواهد کرد = G . من ثروتمند هستم = H . من نگران افزایش قیمتها هستم = I).
۱۲. رئیس مرا تمجید می‌کند تنها اگر بتوانم به خودم مغرور باشم. یا من در کلاس خوب کار می‌کنم یا نمی‌توانم به خودم مغرور باشم. اگر در ورزش کوشا باشم، آنگاه نمی‌توانم در کلاس خوب کار کنم. بنا براین، اگر رئیس مرا تمجید کند آنگاه نمی‌توانم در ورزش کوشا باشم. (رئیس مرا تمجید می‌کند = D . می‌توانم به خودم مغرور باشم = P . در کلاس خوب کار می‌کنم = C . در ورزش کوشا هستم = S).
۱۳. اگر واجدی یا هدایت پیروز شوند آنگاه لطفی و سلیمان گریه می‌کنند. سلیمان گریه نمی‌کند. بنا براین هدایت پیروز نشده است. (واجدی پیروز می‌شود = W . هدایت پیروز می‌شود = H . لطفی گریه می‌کند = L . سلیمان گریه می‌کند = S).
۱۴. اگر من در این درس شرکت کنم و زیاد درس بخوانم آنگاه نمرات خوبی می‌گیرم. اگر نمرات خوبی بگیرم آنگاه خوشحال می‌شوم. من خوشحال نیستم. بنا براین یا من در این درس شرکت نکرده‌ام یا زیاد درس نخوانده‌ام. (من در این درس شرکت می‌کنم = E . من زیاد درس می‌خوانم = S . من نمرات خوبی می‌گیرم = G . من خوشحال هستم = H).

۱۵. اگر او به‌مهمانی برود موهایش را برس خواهد کشید. برای اینکه دلربا جلوه کند لازم است که آراسته باشد. اگر معناد باشد تسلط بر نفس ندارد. اگر موهایش را برس بکشد، دلربا جلوه می‌کند. او دستکشهای سفید (پوست بزغاله‌ای) می‌پوشد تنها وقتی که به‌مهمانی برود. تسلط بر نفس نداشتن کافی است که او را نا آراسته

جلوه گسر کند. بنا بر این آدم معتاد دستکش سفید (پوست بزغاله‌ای) نمی‌پوشد. (او به‌مهمانی می‌رود = P . او موهایش را برس نمی‌کشد = B . او دلر با جلوه می‌کند = F . او آراسته است = T . او معتاد است = O . او تسلط بر نفس دارد = S . او دستکش سفید (پوست بزغاله‌ای) می‌پوشد = G .)

۸. استقرای ریاضی

روش دیگر بوهان که برای اثبات درستی يك حکم ریاضی $P(n)$ مربوط به عدد طبیعی n خیلی به‌کار می‌رود اصل استقرای ریاضی است که در زیر می‌آید.

استقرای ریاضی. اگر $P(n)$ يك حکم مربوط به عدد طبیعی n باشد به‌طوری‌که

$$(۱) \quad P(۱) \text{ راست باشد، و}$$

$$(۲) \quad \text{برای هر عدد طبیعی } k, \quad P(k) \Rightarrow P(k+۱),$$

آنگاه $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n راست است.

اصل بالا نتیجه‌ای از یکی از اصول موضوع پنانو برای اعداد طبیعی است، که در ضمیمه برای ارجاع ذکر شده‌اند.

برای استفاده از اصل استقرای ریاضی در اثبات يك قضیه، باید قضیه را بتوان به‌حالتی تجزیه کرد به‌طوری‌که برای هر عدد طبیعی يك حالت داشته باشیم. آنگاه باید درستی شرایط (۱) و (۲) را بررسی کنیم. بررسی (۱)، که معمولاً ساده است، ما را مطمئن می‌کند که قضیه حداقل برای حالت $n=۱$ راست است. برای تحقیق در درستی شرط (۲)، باید این قضیه کمکی را که فرضش « $P(k)$ راست است» و نتیجه‌اش « $P(k+۱)$ راست است» می‌باشد، ثابت کنیم. فرض « $P(k)$ راست است» را فرض استقرا می‌گویند.

مثال ۱۲. با استقرای ریاضی ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n

$$۱+۲+۳+\dots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

بوهان. در اینجا $P(n)$ حکم زیر است:

$$«۱+۲+۳+\dots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}»$$

به‌ویژه، $P(۱)$ نمایانگر « $۱=(۱ \cdot ۲)/۲$ » است که آشکارا يك گزاره راست است. پس، شرط (۱) استقرای ریاضی برقرار است.

برای اثبات شرط (۲)، فرض می‌کنیم $P(k)$ ، یعنی

استقرای ریاضی ۳۳

$$\langle 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \rangle$$

راست است. سپس به طرفین تساوی $k+1$ اضافه می‌کنیم، داریم

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+2)(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $P(k+1)$ راست است. نشان دادیم که شرایط (۱) و (۲) استقرای ریاضی برقرار هستند. پس، بنا بر اصل استقرای ریاضی،

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

برای هر عدد طبیعی n راست است.

اصل استقرای ریاضی را می‌توان برای تعریفهای مربوط به اعداد طبیعی به کار برد. مثلاً توانهای یک عدد مجهول x را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$x^1 = x$$

$$x^{n+1} = x^n \cdot x \quad \text{برای هر عدد طبیعی } n$$

دو معادله بالا نشان می‌دهند که $x^1 = x$, $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x^2 \cdot x$, ... به عنوان کاربرد دیگر تعریف استقرایی، نماد $C(n, r)$ را در زیر ارائه می‌دهیم.

تعریف ۷. گیریم n عدد طبیعی و r عدد صحیح باشد. علامت $C(n, r)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C(0, 0) = 1, \quad C(0, r) = 0 \quad r \neq 0$$

$$C(n, r) = C(n-1, r) + C(n-1, r-1)$$

قضیه ۸. اگر n و r اعدادی صحیح باشند به طوری که $0 \leq r \leq n$ ، آنگاه

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

که در آن $n!$ حاصلضرب n عدد طبیعی متوالی از ۱ تا n ، یعنی $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ ، به ازای $n > 0$ را نشان می‌دهد و نیز بنا بر قرارداد $0! = 1$ است.

برهان. برهان را به‌عنوان تمرین برعهده خواننده می‌گذاریم.

قضیه ۹. (قضیه دو جمله‌ای). اگر x و y دو متغیر و n يك عدد طبیعی باشند، آنگاه

$$(x+y)^n = C(n, 0)x^n + C(n, 1)x^{n-1}y + \dots + C(n, r)x^{n-r}y^r + \dots + C(n, n)y^n$$

برهان. درستی این قضیه را با روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم. نخست، بدیهی است که قضیه برای حالت $n=1$ درست است. برای تکمیل برهان، فرض می‌کنیم که قضیه برای حالت $n=k$ درست است، یعنی فرض می‌کنیم

$$(x+y)^k = C(k, 0)x^k + C(k, 1)x^{k-1}y + \dots + C(k, r)x^{k-r}y^r + \dots + C(k, k)y^k$$

آنگاه دو طرف تساوی بالا را در $(x+y)$ ضرب می‌کنیم

$$\begin{aligned} (x+y)^{k+1} &= (x+y)[x^k + C(k, 1)x^{k-1}y + \dots + C(k, r)x^{k-r}y^r + \dots + y^k] \\ &= x^{k+1} + [C(k, 0) + C(k, 1)]x^k y + \dots + [C(k, r-1) \\ &\quad + C(k, r)]x^{(k+1)-r}y^r + \dots + y^{k+1} \\ &= C(k+1, 0)x^{k+1} + C(k+1, 1)x^k y + \dots \\ &\quad + C(k+1, r)x^{k+1-r}y^r + \dots + C(k+1, k+1)y^{k+1} \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد اگر قضیه برای $n=k$ درست باشد برای $n=k+1$ نیز درست است. بنابراین، بنا بر استقرای ریاضی، قضیه دو جمله‌ای برای تمام اعداد طبیعی n درست است.

اعداد $C(n, r)$ در قضیه دو جمله‌ای، ضرایب دو جمله‌ای گفته می‌شوند.

تمرین ۸۰۱

۱. قضیه ۸ را با استقرای ریاضی ثابت کنید.

۲. نشان دهید که برای تمام اعداد طبیعی n ، $C(n, 0) = 1 = C(n, n)$.

۳. با استقرای ریاضی ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n ،

$$C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n) = 2^n$$

۴. با استقرای ریاضی ثابت کنید* که برای تمام اعداد طبیعی n ،

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۵. با استقرای ریاضی ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n ،

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + r(r+1) + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

۶. با استقرای ریاضی ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n ،

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

۷. ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n ،

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

۸. ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n ،

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

۹. ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n ،

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

۱۰. ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n ،

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

۱۱. قوانین دمورگن تعمیم یافته زیر را ثابت کنید.

$$\sim(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \Leftrightarrow \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \dots \vee \sim p_n \quad (\text{الف})$$

$$\sim(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \Leftrightarrow \sim p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \dots \wedge \sim p_n \quad (\text{ب})$$

۱۲. قوانین بخشپذیری تعمیم یافته زیر را ثابت کنید.

* پس از حل مسئله، مثال ۱۲ صفحه ۳۲ را دوباره بخوانید. م.

$$p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_n) \iff (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \dots \vee (p \wedge q_n) \quad (\text{الف})$$

$$p \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_n) \iff (p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \dots \wedge (p \vee q_n) \quad (\text{ب})$$

۱۳. ثابت کنید که اگر k يك عدد طبیعی ثابت باشد، آنگاه برای تمام اعداد طبیعی n ،

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k + 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k+1) + \dots + n(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)$$

$$= \frac{1}{k+1} n(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (n+k).$$

۲

مفهوم مجموعه

در این فصل، مفاهیم مجموعه، زیرمجموعه، اعمال در مجموعه‌ها (اجتماع، اشتراك و متمم مجموعه‌ها) وقواعد حاکم بر این اعمال را مطرح می‌کنیم. این مطالب به موازات مطالب فصل ۱ (منطق گزاره‌ها) آمده‌اند. خواننده‌های اندیس‌دار مورد بحث قرار گرفته‌اند. فصل با پارادوکس راسل و يك توضیح تاریخی پایان می‌یابد.

۱. مجموعه‌ها و زیرمجموعه‌ها

باسخ به این پرسش که «مجموعه چیست؟» بسیار دشوار است.^۱ در این کتاب مقدماتی، وارد نظریه‌ی اصل موضوعی مجموعه‌ها نمی‌شویم و به پذیرفتن تعریف زیر اکتفا می‌کنیم: يك مجموعه هر توده‌ای از اشیاء، به نام عناصر، است که از لحاظ حسی یا فکری متمایز و معین باشند. این تعریف شهودی مجموعه را نخستین بار گئورگ کانتور* (۱۸۴۵-۱۹۱۸)، که نظریه‌ی مجموعه‌ها را در سال ۱۸۹۵ پایه‌ریزی کرد، آورده است. چند مثال:

- (الف) مجموعه‌ی تمام صندلی‌های این کلاس.
 (ب) مجموعه‌ی تمام دانشجویان این دانشگاه.

۱. وقتی که دانشجویان به بخش‌های ۷ و ۸ برسند، به اشکال پی خواهند برد.

* Georg Cantor

(ج) مجموعه حروف a, b, c و d .

(د) مجموعه قوانین خوابگاههای دانشگاه.

(ه) مجموعه تمام اعداد گویا که مربعشان ۲ است.

(و) مجموعه تمام اعداد طبیعی.

(ز) مجموعه تمام اعداد حقیقی بین ۰ و ۱.

يك مجموعه را که فقط شامل تعدادی متناهی عنصر باشد مجموعه متناهی می گویند. مجموعه نامتناهی، مجموعه‌ای است که متناهی نباشد. مثالهای بالا از (الف) تا (ه) همگی مجموعه‌های متناهی و مثالهای (و) و (ز) مجموعه‌های نامتناهی هستند.

معمولاً در صورت امکان، مجموعه‌ها را با عنصرهایش در میان دو ابرو نمایش می‌دهند. بنابراین، مجموعه مثال (ج) را به صورت $\{a, b, c, d\}$ می‌نویسند و مجموعه مثال (و) را می‌توان به صورت $\{1, 2, 3, \dots\}$ نشان داد. مجموعه مثال (ه) هیچ عنصری ندارد و چنین مجموعه‌ای را مجموعه تهی گویند که با نماد \emptyset نمایش داده می‌شود.

حروف بزرگ را برای نمایش مجموعه‌ها و حروف کوچک را برای نمایش عنصرهای مجموعه به کار خواهیم برد. اگر a عنصری از مجموعه A باشد، می‌نویسیم $a \in A$ (بخوانید: « a عنصری از A است» یا « a متعلق به A است»، نماد $a \notin A$ بدین معنی است که b عنصری از A نیست).

تعریف ۱. دو مجموعه A و B را مساوی گویند و نویسند $A = B$ ، اگر عنصرهایشان یکی باشد. یعنی $A = B$ به معنی $(\forall x)[(x \in A) \leftrightarrow (x \in B)]$ است.

در نوشتن عنصرهای مجموعه، ترتیب خاصی رعایت نمی‌شود. مثلاً $\{a, b, c\}$ یا $\{b, c, a\}$ یا $\{c, b, a\}$ هر سه يك مجموعه را نمایش می‌دهند. به علاوه، چون عنصرهای يك مجموعه متمایز هستند، مثلاً $\{a, a, b\}$ نماد مناسبی برای مجموعه $\{a, b\}$ نیست. اگر a عنصری از يك مجموعه باشد، باید a را متمایز از $\{a\}$ در نظر گرفت، یعنی $a \neq \{a\}$. زیرا $\{a\}$ مجموعه‌ای است که تنها از عنصر a تشکیل شده است، در صورتی که a عنصر مجموعه $\{a\}$ است.

تعریف ۲. گیریم A و B دو مجموعه باشند. اگر هر عنصر A ، عنصر B نیز باشد، می‌گوییم A زیرمجموعه B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$ یا $B \supseteq A$. اگر A زیرمجموعه B باشد، B را ابرمجموعه A می‌نامیم.

بنابراین، به زبان منطق

$$A \subseteq B \equiv (\forall x)[(x \in A) \rightarrow (x \in B)]$$

بدیهی است که هر مجموعه يك زیرمجموعه (يك ابرمجموعه) خودش است. هر گاه $A \neq B$ و $A \subseteq B$ باشد، می‌نویسیم $A \subset B$ یا $B \supset A$ ، و می‌خوانیم: A زیرمجموعه سرته B ، یا B ابرمجموعه سرته A است. به عبارت دیگر، A زیرمجموعه سرته B است، به معنی آن

است که هر عنصر A ، عنصر B است، و عنصری در B وجود دارد که عنصر A نیست. اگر A زیرمجموعه B نباشد، می‌نویسیم $A \not\subseteq B$.

قضیه ۰۱. مجموعه تهی \emptyset ، زیرمجموعه هر مجموعه است.

برهان. فرض کنیم A يك مجموعه باشد. باید ثابت کنیم که گزاره شرطی

$$(x \in \emptyset) \rightarrow (x \in A)$$

برای هر x درست است. چون مجموعه تهی عنصری ندارد، گزاره « $x \in \emptyset$ » دروغ است، گزاره « $x \in A$ » چه راست باشد چه دروغ، گزاره شرطی « $(x \in \emptyset) \rightarrow (x \in A)$ »، بنا بر جدول ارزش گزاره شرطی، راست است (حالت‌های ۳ و ۴ جدول ۵، فصل ۱). پس، به‌ازای هر مجموعه A ، $\emptyset \subseteq A$.

قضیه ۰۲. اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ، آنگاه $A \subseteq C$.

برهان. باید نشان دهیم که $(x \in A) \Rightarrow (x \in C)$:

$$(x \in A) \Rightarrow (x \in B) \quad A \subseteq B \text{ زیرا}$$

$$(x \in B) \Rightarrow (x \in C) \quad B \subseteq C \text{ زیرا}$$

از این‌رو، بنا بر قانون تعدی (قضیه ۴ (ج)، فصل ۱)، داریم

$$(x \in A) \Rightarrow (x \in C)$$

پس ثابت کردیم $A \subseteq C$.

تمرین ۱۰۲

۱. نشان دهید که مجموعه حروف لازم برای هجی کردن «بینابین» با مجموعه حروف لازم برای هجی کردن «بیان» مساوی است.

۲. تعیین کنید که در میان مجموعه‌های زیر، کدام مجموعه، زیرمجموعه دیگری است.

$$(الف) \{ \text{تمام اعداد حقیقی } x \text{ که } ۰ = x^2 - ۸x + ۱۲ \text{ صدق می‌کنند} \} = A$$

$$(ب) B = \{۲, ۴, ۶\}$$

$$(ج) C = \{۲, ۴, ۶, ۸, \dots\}$$

$$(د) D = \{۶\}$$

۳. تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $\{-1, 0, 1\}$ را بنویسید.

۴. ثابت کنید که $(A = B) \iff [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$. [تصوره: اغلب در ریاضیات

بهترین راه برای نشان دادن $A = B$ آن است که نشان دهیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$].

۵. ثابت کنید که $(A \subseteq \emptyset) \Rightarrow (A = \emptyset)$

۶. ثابت کنید که

$$[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \subseteq C) \quad (\text{الف})$$

$$[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \subseteq C) \quad (\text{ب})$$

۷. مثالی بیاورید از مجموعه‌ای که هر یک از عنصرهایش یک مجموعه باشد.

۸. در هر یک از حکمهای زیر تعیین کنید حکم راست است یا دروغ. درستی احکامی را

که راست هستند ثابت کنید. نادرستی احکام دروغ را با یک مثال ثابت کنید. (مثالی

را که نادرستی حکمی را ثابت کند، مثال نقیض گویند.)

(الف) اگر $x \in A$ و $A \in B$ ، آنگاه $x \in B$.

(ب) اگر $A \subseteq B$ و $B \in C$ ، آنگاه $A \in C$.

(ج) اگر $A \not\subseteq B$ و $B \subseteq C$ ، آنگاه $A \not\subseteq C$.

(د) اگر $A \not\subseteq B$ و $B \not\subseteq C$ ، آنگاه $A \not\subseteq C$.

(ه) اگر $x \in A$ و $A \not\subseteq B$ ، آنگاه $x \notin B$.

(و) اگر $A \subseteq B$ و $x \notin B$ ، آنگاه $x \notin A$.

۹. تعیین کنید کدام یک از گزاره‌های زیر راست و کدام یک دروغ است.

$$x \in \{\{x\}, \{x, y\}\} \quad (\text{الف})$$

$$\{x\} \subseteq \{\{x\}, \{x, y\}\} \quad (\text{ب})$$

$$\{1, x, 2\} \subseteq \{1, 2, x\} \quad (\text{ج})$$

$$\{a, b\} \subseteq \{b, a\} \quad (\text{د})$$

$$\{x\} \in \{x\} \quad (\text{ه})$$

۱۰. تعیین کنید گزاره‌های زیر راست هستند یا دروغ

$$\emptyset = \{\emptyset\} \quad (\text{الف})$$

$$\emptyset \in \{\emptyset\} \quad (\text{ب})$$

$$\{\emptyset\} \in \emptyset \quad (\text{ج})$$

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}\} \quad (\text{د})$$

۱۱. یک مجموعه n عنصری داده شده است. ثابت کنید که این مجموعه $C(n, r)$ زیر مجموعه

r عنصری دارد*.

۲. تصریح مجموعه‌ها

یک روش ساختن یک مجموعه جدید از مجموعه مفروض، مشخص کردن عنصرهایی از مجموعه

* $r \leq n$ فرض شده است. -م.

تصريح مجموعه‌ها ۲۱

مفروض است که در يك ويژگی خاص صدق می‌کنند. مثلاً فرض کنیم A مجموعه تمام دانشجویان این دانشگاه باشد. گزاره « x زن است» برای بعضی از عنصرهای A راست و برای بقیه دروغ است. نماد

$$\{x \in A \mid x \text{ زن است}\}$$

را برای شناسایی مجموعه تمام دانشجویان زن این دانشگاه به کار می‌بریم. همچنین

$$\{x \in A \mid x \text{ زن نیست}\}$$

مجموعه تمام دانشجویان مرد این دانشگاه را مشخص می‌کند. به عنوان يك قاعده، می‌گوییم متناظراً هر مجموعه A در حکم $p(x)$ در بازه $x \in A$ ، يك مجموعه $\{x \in A \mid p(x)\}$ وجود دارد که عنصرهایش دقیقاً آن عنصرهای A ، مانند x هستند که حکم $p(x)$ برای آنها راست است. در نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها، این قاعده را معمولاً يك اصل موضوع به نام اصل موضوع تصریح، می‌گیرند. نماد $\{x \in A \mid p(x)\}$ خوانده می‌شود: مجموعه تمام x های در A به طوری که $p(x)$ راست است. نماد به صورت $\{x \in A \mid p(x)\}$ که مجموعه را مشخص می‌کند، نماد مجموعه‌ساز نامیده می‌شود.

مثال ۱. فرض کنیم \mathbf{R} مجموعه تمام اعداد حقیقی باشد. آنگاه

$$(الف) \{x \in \mathbf{R} \mid x = x + 1\}, \text{ مجموعه تهی است.}$$

$$(ب) \{x \in \mathbf{R} \mid 2x^2 - 5x - 3 = 0\}, \text{ مجموعه } \{3, -1/2\} \text{ است.}$$

$$(ج) \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 1 = 0\}, \text{ مجموعه تهی است.}$$

چون در این کتاب و در مباحث دیگر ریاضی مجموعه‌های زیر بارها به کار می‌روند، نمادهای زیر را به این مجموعه‌ها تخصیص می‌دهیم:

$$\mathbf{R} = \{x \mid x \text{ عدد حقیقی است.}\}$$

$$\mathbf{Q} = \{x \mid x \text{ عدد گویا است.}\}$$

$$\mathbf{Z} = \{x \mid x \text{ عدد صحیح است.}\}$$

$$\mathbf{N} = \{n \mid n \text{ عدد طبیعی است.}\}$$

$$\mathbf{I} = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

$$\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$$

توجه دارید که $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ و $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}_+ \subset \mathbf{R}$.

امکان دارد که هر عنصر مجموعه، خود يك مجموعه باشد. مثلاً، مجموعه تمام زیرمجموعه‌های يك مجموعه مفروض A ، هر عنصرش يك مجموعه است. این مجموعه را

مجموعه توانی A می گویند و آن را با $\mathcal{P}(A)$ نشان می دهند.

مثال ۲. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ، $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$ و

$$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

قضیه زیر انگیزه نامگذاری «مجموعه توانی» را آشکار می سازد.

قضیه ۳. اگر A از n عنصر تشکیل شده باشد آنگاه مجموعه توانی $\mathcal{P}(A)$ ، دقیقاً 2^n عنصر دارد.

برهان. بدیهی است که قضیه برای $A = \emptyset$ راست است. وقتی A تهی نیست، آن را $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ می گیریم. یک عنصر A مانند a_i در نظر می گیریم، هر زیرمجموعه A دو حالت دارد: یا شامل a_i است یا نیست. از این رو مسئله یافتن تعداد زیرمجموعه های A برمی گردد به این مسئله که n مربع خالی $\square \square \square \dots \square$ در نظر بگیریم و به انواع مختلف در هر یک از این مربعها عدد ۰ یا ۱ بگذاریم. چون به 2^n صورت این n مربع را با اعداد ۰ و ۱ می توان پر کرد و هر یک از n مربعهای پر شده با یک زیرمجموعه A متناظر است (به این ترتیب که a_i را در زیرمجموعه می گیریم اگر و تنها اگر در k امین مربع عدد ۱ باشد)، بنابراین تعداد زیرمجموعه های A دقیقاً 2^n است. شاید دانستن برهان دیگری که برای قضیه ۳ در زیر می آید، جالب باشد.

برهان دیگر. اولاً مجموعه \emptyset متعلق به $\mathcal{P}(A)$ است. ثانیاً متناظر با هر عنصر $x \in A$ ، مجموعه $\{x\}$ متعلق به $\mathcal{P}(A)$ است. توجه کنید که تعداد زیرمجموعه های تک عنصری، $C(n, 1)$ است. به همین ترتیب، $C(n, 2)$ تعداد زیرمجموعه های دو عنصری A است. بالاخره $C(n, n) = 1$ تعداد زیرمجموعه های n عنصری A ، یعنی خود A ، است. با در نظر گرفتن مجموعه تهی، تعداد کل زیرمجموعه های A برابر است با

$$C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n)$$

اکنون بسط دو جمله ای را برای $(1+1)^n$ می نویسیم

$$(1+1)^n = C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n)$$

بنابراین، تعداد عنصرهای $\mathcal{P}(A)$ برابر است با $2^n = (1+1)^n$.

۱. در نظریه اصل موضوعی مجموعه ها، وجود مجموعه توانی مسلم فرض نشده است. چون وجود مجموعه توانی از اصل موضوع تصریح نتیجه نمی شود، به یک اصل موضوع جدید نیاز است. این موضوع جدید را معمولاً اصل موضوع مجموعه های توانی می گویند که به صورت زیر بیان می شود: متناظر با هر مجموعه، مجموعه ای از مجموعه ها وجود دارد که عنصرهایش از تمام زیرمجموعه های مجموعه داده شده تشکیل یافته است.

۲. به مسئله ۱۱، تمرین ۱.۲ رجوع کنید.

تمرین ۲۰۲

۱. عناصرهای هر يك از مجموعه‌های زیر را در میان دوا برو بنویسید.

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 5\}$$

$$B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 \leq 25\}$$

$$C = \{x \in \mathbf{Q} \mid 10x^2 + 3x - 1 = 0\}$$

$$D = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$$

$$E = \{x \in \mathbf{R}_+ \mid 4x^2 - 4x - 1 = 0\}$$

۲. عناصر هر يك از مجموعه‌های زیر را در میان دوا برو نمایش دهید.

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid 5 < x < 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbf{Z} \mid 25 \leq x^2 < 36\}$$

$$C = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 - 6x^2 + 11x - 6 = 0\}$$

$$D = \{x \in \text{اروپا} \mid x \text{ پایتخت است}\}$$

۳. هر يك از مجموعه‌های زیر را با استفاده از نماد مجموعه‌ساز بنویسید.

$$A = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

$$C = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$$

$$D = \{2, 9, 28, 65, \dots\}$$

$$E = \{a, e, i, o, u\}$$

۴. هر يك از مجموعه‌های زیر را با نماد مجموعه‌ساز نشان دهید.

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \left\{-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right\}$$

$$C = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

$$D = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$$

۵. عنصرهای مجموعه توانی مجموعه $\{x, \{y, z\}\}$ چه هستند؟ این مجموعه توانی چند عنصر دارد؟
۶. آیا مجموعه توانی مجموعه تهی، تهی است؟ چرا؟
۷. مجموعه توانی مجموعه توانی مجموعه تهی چند عنصر دارد؟
۸. مجموعه $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ را بنویسید. آیا این مجموعه بیش از مجموعه $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ عنصر دارد؟
۹. آیا برای هر مجموعه A و هر مجموعه B ، $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ ، چرا؟
۱۰. آیا برای هر مجموعه A و هر مجموعه B ، $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ ، چرا؟
۱۱. فرض کنید B یک زیرمجموعه A باشد، و $\mathcal{P}(A:B) = \{X \in \mathcal{P}(A) \mid X \supseteq B\}$.
 (الف) فرض کنید $B = \{a, b\}$ و $A = \{a, b, c, d, e\}$. عنصرهای مجموعه $\mathcal{P}(A:B)$ را بنویسید؛ تعداد این عنصرها را تعیین کنید.
 (ب) نشان دهید که $\mathcal{P}(A:\emptyset) = \mathcal{P}(A)$.
۱۲. A را یک مجموعه n عنصری و B را یک زیرمجموعه m عنصری A فرض کنید،
 $n \geq m$.
 (الف) تعداد عنصرهای مجموعه $\mathcal{P}(A:B)$ را پیدا کنید.
 (ب) B را \emptyset گرفته، قضیه ۳ را از (الف) نتیجه بگیرید.

۳. اجتماع و اشتراك

در حساب می‌توانیم دو عدد را جمع، ضرب، یا تفریق کنیم. در نظریه مجموعه‌ها، سه عمل اجتماع، اشتراك و متممگیری به ترتیب نظیر جمع، ضرب و تفریق در اعداد هستند.

تعریف ۳. اجتماع دو مجموعه A و B ، که با $A \cup B$ نشان داده می‌شود، مجموعه تمام عنصرهایی است که حداقل به یکی از دو مجموعه A و B متعلق‌اند. یعنی $x \in A \cup B$ اگر و تنها اگر $x \in A \vee x \in B$.

تعریف ۴. اشتراك دو مجموعه A و B ، که با $A \cap B$ نمایش داده می‌شود، مجموعه تمام عنصرهایی است که هم متعلق به A هستند و هم متعلق به B . یعنی

$$\cdot \{x \in A \mid x \in B\} \text{ یا } A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

اگر $A \cap B = \emptyset$ ، آن‌گاه دو مجموعه A و B را مجزا گویند.

به عنوان مثال، اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5\}$ ، آنگاه $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $A \cap B = \{3, 4\}$ ؛ اگر Im نمایانگر مجموعه اعداد موهومی باشد، آنگاه مجموعه‌های Im و \mathbb{R} مجزا هستند.

مثال ۳. مجموعه‌های \mathbb{I} ، \mathbb{N} ، \mathbb{Z} ، ... را که در بخش قبل تعریف کردیم، در نظریه بگیریم.

(الف) $N \cap I = \{1\}$ و $I \cap Z = \{0, 1\}$

(ب) $Z \cap Q = Z$ و $Z \cup Q = Q$

(ج) $I \cap I = I$ و $I \cup I = I$

قضیه ۴. گیریم X يك مجموعه و A, B, C زیر مجموعه‌هایی از X هستند. آنگاه داریم:
(الف) یکها

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap X = A$$

(ب) قانونهای خودتوانی

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

(ج) قانونهای جابه‌جایی

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

(د) قانونهای شرکتپذیری

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

(ه) قانونهای پخشپذیری

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

برهان. برهان قسمتهای (الف)، (ب) و (ج) را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.
(د) بنا بر تعریف ۳،

$$x \in A \cup (B \cap C) \iff x \in A \vee (x \in B \cap C)$$

و

$$x \in B \cup C \iff x \in B \vee x \in C$$

پس

$$x \in A \cup (B \cup C) \iff x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$$

بنابر قانون شرکتپذیری در ترکیب فصلی، $(x \in A) \vee (x \in B \vee x \in C)$ با

پس بنا بر تعریف ۱، $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ، هم ارز است. بنا بر تعریف ۳، گسزارة اخير با $(x \in A \vee x \in B) \vee (x \in C)$ هم ارز است، و از اين رو $x \in (A \cup B) \cup C$ ، پس، داريم $x \in A \cup (B \cup C) \iff x \in (A \cup B) \cup C$

برهان بالا را مي توان به صورتی روشن در قالبی منظم از مرحله های منطقی اساسی خلاصه کرد و برای سهولت ارجاع، دليل درستی هر مرحله را در سمت چپ آن نوشت.

تعريف \cup	$x \in A \cup (B \cup C) \iff (x \in A) \vee (x \in B \cup C)$
تعريف \cup	$\iff (x \in A) \vee [(x \in B) \vee (x \in C)]$
شرکت پذیری \vee	$\iff [(x \in A) \vee (x \in B)] \vee (x \in C)$
تعريف \cup	$\iff (x \in A \cup B) \vee (x \in C)$
تعريف \cup	$\iff x \in (A \cup B) \cup C$

از اين رو، بنا بر تعریف ۱، ثابت کردیم که $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. دانشجویان باید سعی کنند ارزش این نوع برهان دقیق منظم از راه منطقی را دریابند. برهان $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ را به خواننده واگذار می کنیم. (ه) در این قسمت نیز فقط قسمت اول حکم (ه) را ثابت و قسمت دیگر را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می کنیم.

تعريف \cap	$x \in [A \cap (B \cup C)] \iff [(x \in A) \wedge (x \in B \cup C)]$
تعريف \cup	$\iff (x \in A) \wedge [(x \in B) \vee (x \in C)]$
قانون پخش پذیری منطق (فصل اول)	$\iff [(x \in A) \wedge (x \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (x \in C)]$
تعريف \cap	$\iff [(x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)]$
تعريف \cup	$\iff x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

از اين رو، بنا بر تعریف ۱، $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

تمرین ۳.۲

۱. ثابت کنید که $A \subseteq B \iff A \cup B = B$
۲. ثابت کنید $A \subseteq B \iff A \cap B = A$
۳. قسمت های (الف)، (ب) و (ج) قضیه ۴ را ثابت کنید.
۴. قسمت دوم قضیه ۴ (د) را ثابت کنید.

۵. قسمت دوم قضیه ۴ (ه) را ثابت کنید.

۶. ثابت کنید که

(الف) از $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ ، نتیجه می‌شود $(A \cup B) \subseteq C$ نتیجه می‌شود.

(ب) از $A \subseteq B$ و $A \subseteq C$ ، نتیجه می‌شود $A \subseteq (B \cap C)$ نتیجه می‌شود.

[راهنمایی: می‌توانید از قضیه ۵ فصل ۱ استفاده کنید.]

۷. ثابت کنید $C \subseteq A \iff (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

۸. ثابت کنید که اگر $A \subseteq B$ آنگاه $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

۹. ثابت کنید $A = B \iff A \cup B = A \cap B$.

۱۰. ثابت کنید که اگر $A \subseteq B$ آنگاه برای هر مجموعه C ، $A \cup C \subseteq B \cup C$ و

$$A \cap C \subseteq B \cap C$$

۱۱. ثابت کنید که اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq D$ آنگاه $A \cup B \subseteq C \cup D$.

۱۲. درستی یا نادرستی دو عبارت زیر را تحقیق کنید

(الف) اگر $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$.

(ب) اگر $A \cap B = A \cap C$ آنگاه $B = C$.

۱۳. ثابت کنید که برای مجموعه‌های A, B_1, B_2, \dots, B_n داریم

(الف)

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$$

۱۴. ثابت کنید

(الف) اگر برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، $A_i \subseteq B$ آنگاه $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \subseteq B$.

(ب) اگر برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، $A \subseteq B_i$ آنگاه $A \subseteq B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$.

۴. مجموعه‌های متمم

در نظریه مجموعه‌ها، عمل متمم‌گیری، مشابه عمل تفریق در حساب است.

تعریف ۵. اگر A و B دو مجموعه باشند، متمم B نسبت به A مجموعه $A - B$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

در این تعریف، $B \subseteq A$ فرض نشده است.

مثال ۴. بگیریم

$$A = \{a, b, c, d\} \quad \text{و} \quad B = \{c, d, e, f\}$$

مجموعه‌های $A - B$ و $A - (A \cap B)$ را پیدا کنید.

حل:

$$A - B = \{a, b, c, d\} - \{c, d, e, f\} = \{a, b\}$$

و

$$A - (A \cap B) = \{a, b, c, d\} - \{c, d\} = \{a, b\}$$

اگر چه مجموعه جهانی، یعنی مجموعه تمام مجموعه‌ها، به مفهوم مطلق آن وجود ندارد (به پارادوکس راسل در بخش ۷ نگاه کنید)، اما می‌توان فرض کرد که تمام مجموعه‌هایی که از این به بعد در این کتاب آورده می‌شوند، زیر مجموعه‌هایی از یک مجموعه ثابت U هستند که می‌توان آن را (موقتاً) به عنوان یک مجموعه جهانی، به معنای محدود آن، در نظر گرفت. برای ارائه قواعد اساسی مربوط به متممگیری به ساده‌ترین صورت ممکن، تمام متممها نسبت به این مجموعه‌ی U محاسبه می‌شوند، مگر اینکه خلاف آن قید شده باشد. در این حالت $A - U$ را با A' نمایش می‌دهیم.

مثال ۵. نشان دهید که $A - B = A \cap B'$.

حل:

تعریف \cap ، تعریف'	$x \in A \cap B' \equiv (x \in A) \wedge (x \in U - B)$
تعریف ۵	$\equiv (x \in A) \wedge [(x \in U) \wedge (x \notin B)]$
شرکت پذیری	$\equiv [(x \in A) \wedge (x \in U)] \wedge (x \notin B)$
تعریف \cap	$\equiv (x \in A \cap U) \wedge (x \notin B)$
$A \cap U = A$	$\equiv (x \in A) \wedge (x \notin B)$
تعریف ۵	$\equiv x \in (A - B)$

پس بنا بر تعریف ۱، $A \cap B' = A - B$.

قضیه ۵. گیریم A و B دو مجموعه هستند. آنگاه

(الف) $(A')' = A$.

(ب) $U' = \emptyset$ و $\emptyset' = U$.

(ج) $A \cup A' = U$ و $A \cap A' = \emptyset$.

(د) $A \subseteq B$ اگر و تنها اگر $B' \subseteq A'$.

برهان. قسمتهای (الف)، (ب) و (ج) به آسانی از تعریفها به دست می‌آیند و آوردن برهانهای آنها را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم و برهان قسمت (د) را

ارائه می‌دهیم:

تعریف \subseteq	$A \subseteq B \equiv [(x \in A) \rightarrow (x \in B)]$
قانون عکس نقیض	$\equiv [(x \notin B) \rightarrow (x \notin A)]'$
تعریف $'$	$\equiv [(x \in B') \rightarrow (x \in A')]$
تعریف \subseteq	$\equiv (B' \subseteq A')$

پس ثابت کردیم که $(A \subseteq B) \equiv (B' \subseteq A')$.

دربرهان بالا نیز نمادها و قوانین منطق (فصل ۱) را به کار بردیم. با این روش توانستیم به طور دقیق و مرتب هر مرحله برهان را عرضه کنیم و دلایلها را درست چپ آن بیاوریم. به خواننده توصیه می‌کنیم هر جا امکان دارد برای برهانها از فصل ۱ به طور کامل استفاده کند.

مفیدترین ویژگی متممها، قضیهٔ دمورگن است که در زیر می‌آید. شایسته است خواننده این قضیه را با قانون دمورگن فصل ۱ مقایسه کند.

قضیه ۶. (قضیهٔ دمورگن). اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، آنگاه

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad (\text{الف})$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad (\text{ب})$$

برهان. (الف):

تعریف $'$	$x \in (A \cup B)' \equiv \sim [x \in (A \cup B)]$
تعریف \cup	$\equiv \sim [(x \in A) \vee (x \in B)]$
دمورگن در منطق	$\equiv \sim (x \in A) \wedge \sim (x \in B)$
تعریف $'$	$\equiv (x \in A') \wedge (x \in B')$
تعریف \cap	$\equiv x \in (A' \cap B')$

پس بنا بر تعریف ۱، $(A \cup B)' = A' \cap B'$.
اثبات (ب) به خواننده واگذار می‌شود.

مثال ۶. سه مجموعه دلخواه A ، B ، و C مفروض‌اند. تعیین کنید آیا مجموعه $A \cap (B - C)$ با مجموعه $(A \cap B) - (A \cap C)$ مساوی است.

۱. یادآوری می‌شود که نقیض $x \in B$ ، یعنی $\sim(x \in B)$ ، با $x \notin B$ نمایش داده می‌شود.

حل:

$$\begin{aligned}
 \text{مثال ۵} \quad (A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (A \cap C)' \\
 &= (A \cap B) \cap (A' \cup C') \\
 &= (A \cap B \cap A') \cup (A \cap B \cap C') \\
 &= (A \cap A' \cap B) \cup (A \cap B \cap C') \\
 \text{قضیه ۵ (ج): } A \cap A' = \emptyset &= \emptyset \cup [A \cap (B \cap C')] \\
 \text{قضیه ۴ (الف)، مثال ۵} &= A \cap (B - C)
 \end{aligned}$$

بنابراین ثابت کردیم که $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

تمرین ۴۰۲

۰۱. گیریم A و B مجموعه هستند. ثابت کنید که $A - B = A - (B \cap A)$.
۰۲. قسمتهای (الف)، (ب) و (ج) قضیه ۵ را ثابت کنید.
۰۳. گیریم A و B مجموعه هستند. ثابت کنید $B \subseteq A'$ اگر و تنها اگر $A \cap B = \emptyset$.
۰۴. گیریم A و B مجموعه هستند. ثابت کنید $A \cap B = \emptyset$ اگر و تنها اگر $A \cap B' = A$.
۰۵. ثابت کنید که برای هر دو مجموعه A و B ، $A' - B' = B - A$.
۰۶. گیریم A و B مجموعه هستند. ثابت کنید $(A - B) \cup B = A$ اگر و تنها اگر $B \subseteq A$.
۰۷. قضیه ۶ (ب) را ثابت کنید.
۰۸. گیریم A ، B و C سه مجموعه هستند. ثابت کنید
 (الف) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$
 (ب) $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$
۰۹. گیریم A_1, A_2, \dots, A_n و C مجموعه هستند. ثابت کنید
 $(A_1 - C) \cup (A_2 - C) \cup \dots \cup (A_n - C) = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) - C$
۰۱۰. گیریم B_1, B_2, \dots, B_n و C مجموعه هستند. ثابت کنید
 $(B_1 - C) \cap (B_2 - C) \cap \dots \cap (B_n - C) = (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) - C$
۰۱۱. گیریم A و B دو مجموعه هستند. ثابت کنید A و $B - A$ مجزا هستند و نیز $A \cup B = A \cup (B - A)$. (این نشان می‌دهد چگونه $A \cup B$ را به اجتماع دو مجموعه مجزا بنویسیم).
۰۱۲. ثابت کنید که $A \cup B = (A' \cap B)'$ و $A \cap B = (A' \cup B)'$.
۰۱۳. مجموعه‌های A و B چه شرطهایی باید داشته باشند تا $A - B = B - A$ برقرار باشد؟

۱۴. گیریم A, B و C سه مجموعه هستند. ثابت کنید

$$(A-B)-C = (A-C)-(B-C)$$

۱۵. گیریم A, B و C سه مجموعه هستند. ثابت کنید

$$(A-B)-C = A-(B \cup C)$$

۱۶. گیریم A و B دو مجموعه هستند. ثابت کنید $A \cap B' = \emptyset = A' \cap B$ اگر و تنها اگر $A = B$.

۱۷. گیریم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه X هستند. درستی یا نادرستی رابطه زیر را تحقیق کنید

$$(X-A) \cap (X-B) = X - (A \cap B)$$

۱۸. گیریم A, B و C سه مجموعه هستند. ثابت کنید

$$(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C' \quad (\text{الف})$$

$$(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C' \quad (\text{ب})$$

این نتایج را به گزاره‌هایی که مربوط به n مجموعه A_1, A_2, \dots, A_n هستند، تعمیم دهید.

۱۹. دو مجموعه اختیاری A و B مفروض‌اند، درستی یا نادرستی حکمهای زیر را تعیین کنید.

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B) \quad (\text{الف})$$

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \quad (\text{ب})$$

۲۰. ثابت کنید که اگر $A \subseteq C, B \subseteq C, A \cup B = C$ و $A \cap B = \emptyset$ ، آنگاه $A = C - B$.

۲۱. گیریم A و B مجموعه هستند. ثابت کنید

$$(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

۲۲. فرض کنید X مجموعه توانی يك مجموعه مفروض و ناتهی U باشد. در X عمل دو تایی \oplus را که تفاضل متقارن نامیده می‌شود، چنین تعریف می‌کنیم

$$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A) \quad A, B \in X$$

ثابت کنید برای A, B, C در X

$$A \oplus B \in X \quad (\text{الف})$$

$$A \oplus B = B \oplus A \quad (\text{ب})$$

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C \quad (\text{ج})$$

$$A \oplus \emptyset = A \quad (\text{د})$$

$$A \oplus A = \emptyset \quad (\text{ا})$$

۲۳. با فرضهای مسئله ۲۲ ی بالا، ثابت کنید

$$A \oplus A' = U \quad (\text{الف})$$

$$C = \emptyset \text{ اگر و تنها اگر } A \oplus C = A \quad (\text{ب})$$

$$C = A \text{ اگر و تنها اگر } A \oplus C = \emptyset \quad (\text{ج})$$

$$A = B \text{ اگر } A \oplus C = B \oplus C \quad (\text{د})$$

۲۴. با فرضهای مسئله ۲۲ ی بالا، ثابت کنید

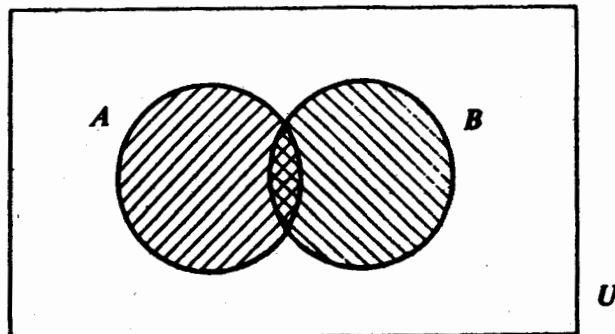
$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$$

تذکر: دستگامی مانند (X, \oplus) که از يك مجموعه و يك عمل دوتایی تشکیل شده است و در شرطهای (الف) تا (ه) مسئله ۲۲ صدق می کند يك گروه (جبری) نامیده می شود.

۵. نمودار ون*

برای اینکه اعمال روی مجموعه و نتایج آنها را به چشم ببینیم، نمودارهایی را که به نمودارهای ون معروف هستند، معرفی می کنیم. مجموعه فرضی و نسبی جهانی U را با يك مستطیل و زیرمجموعه های U را با دایره های در داخل این مستطیل نشان می دهیم. مثلاً، در شکل ۱ دو مجموعه A و B را با دایره های تیره نشان داده ایم. قسمت تیره تر، مجموعه اشتراك $A \cap B$ و تمام سطح تیره اجتماع $A \cup B$ است.

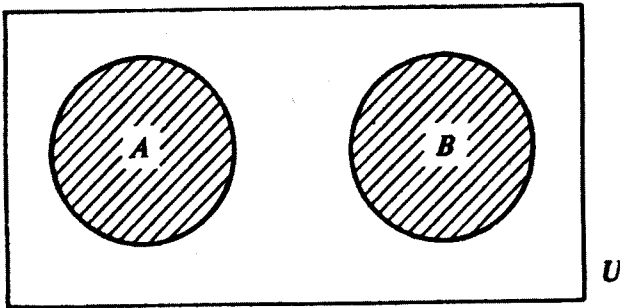
شکل ۲ نشان می دهد که دو مجموعه A و B مجزا هستند. سطح تیره در شکل ۳ متمم مجموعه A یعنی A' را نمایان می سازد. در شکل ۴ مجموعه $A - B$ ، متمم B نسبت به A ، با قسمت تیره شکل مشخص شده است.



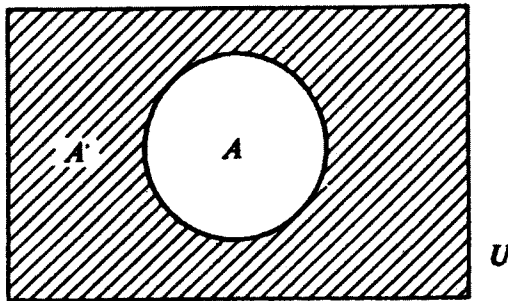
شکل ۱

* Venn diagram

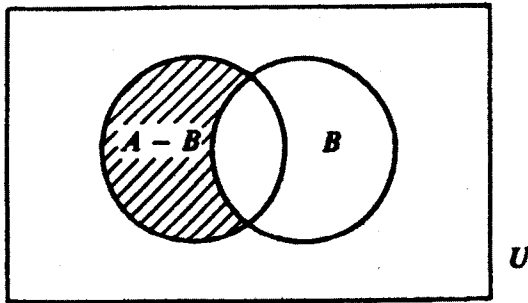
نمودار ون ۵۳



شکل ۲



شکل ۳

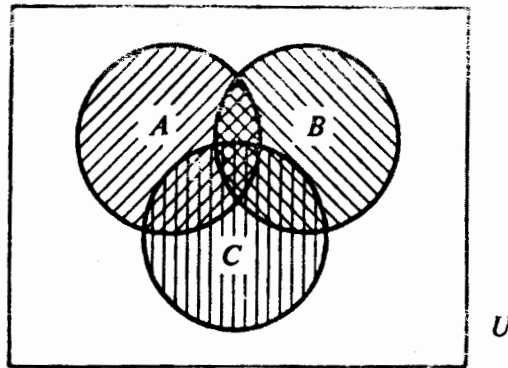


شکل ۴

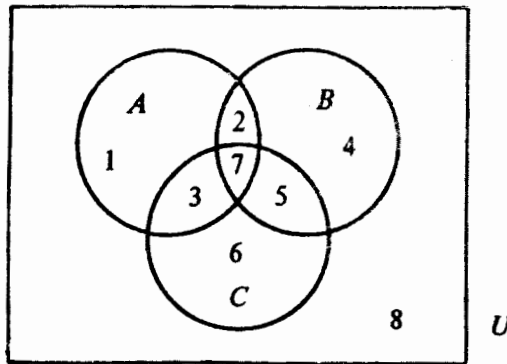
شکل ۵ نمونه‌ای است از نمودار ون برای سه مجموعه A ، B و C . این سه مجموعه، مجموعه جهانی U را به هشت قسمت که در شکل ۶ مشخص شده‌اند تقسیم می‌کنند. با دیاگرام بالا می‌توانیم مثلاً درستی قانون پخشپذیری

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

را به صورت زیر توجیه کنیم: در شکل ۶، مجموعه $A \cap (B \cup C)$ از سطوح ۲، ۳ و ۷



شکل ۵



شکل

تشکیل شده است. از طرف دیگر، $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ اجتماع سطوح ۲ و ۷ و سطوح ۳ و ۷ است. بنابراین، تساوی $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ قابل قبول به نظر می‌آید. البته در ریاضیات این توجیه و نظایر آن را نمی‌توان به‌عنوان یک برهان قبول کرده

تمرین ۵-۲

۱. یک نمودار ون برای $A \subset B$ رسم کنید.
۲. برای $A \cap B$ ، $A' \cap B$ و $A' \cap B'$ نمودارهای ون رسم کنید.
۳. برای $A \cup B$ ، $A' \cup B$ و $A' \cup B'$ نمودارهای ون رسم کنید.
۴. یک نمودار ون برای $A \oplus B$ رسم کنید.

درمسائل ۵ تا ۱۳، نمودارهای ون رسم کرده و هر یک از رابطه‌ها را توجیه کنید.

خانواده‌های مجموعه‌های اندیسدار ۵۵

$$.A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad .۵$$

$$.A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad .۶$$

$$.A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad .۷$$

$$.(A \cup B)' = A' \cap B' \quad .۸$$

$$.(A \cap B)' = A' \cup B' \quad .۹$$

$$.A \cup (B - A) = A \cup B \quad \text{و} \quad A \cap (B - A) = \emptyset \quad .۱۰$$

$$.(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) \quad .۱۱$$

$$.۱۲ \quad A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C \quad \text{[راه‌نمایی: برای ۱۲ تا ۱۴، از شکل ۶ استفاده کنید].}$$

$$.A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C) \quad .۱۳$$

در مسائل ۱۴ تا ۲۰ برای اثبات نادرستی رابطه‌های زیر از نمودار ون استفاده کنید.

$$.۱۴ \quad A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$$

$$.۱۵ \quad \text{اگر } x \in A \text{ و } A \not\subseteq B \text{، آنگاه } x \notin B \text{ [مسئله ۸ (ه)، تمرین ۱۰۲].}$$

$$.۱۶ \quad \text{اگر } A \not\subseteq B \text{ و } B \not\subseteq C \text{، آنگاه } A \not\subseteq C \text{ [مسئله ۸ (د)، تمرین ۱۰۲].}$$

$$.۱۷ \quad \text{اگر } A \not\subseteq B \text{ و } B \not\subseteq C \text{، آنگاه } A \not\subseteq C \text{ [مسئله ۸ (ج)، تمرین ۱۰۲].}$$

$$.۱۸ \quad \text{الف) اگر } A \cup B = A \cup C \text{، آنگاه } B = C \text{ [مسئله ۱۲، تمرین ۳۰۲].}$$

$$\text{ب) اگر } A \cap B = A \cap C \text{، آنگاه } B = C$$

$$.۱۹ \quad \text{اگر } A \text{ و } B \text{ زیرمجموعه‌های } X \text{ باشند، آنگاه}$$

$$(X - A) \cap (X - B) = X - (A \cap B)$$

[مسئله ۱۷، تمرین ۳۰۲].

$$\bullet \quad .۲۰ \quad \text{اگر } A \text{ و } B \text{ زیرمجموعه‌های } X \text{ باشند، آنگاه}$$

$$(X - A) \cup (X - B) = X - (A \cup B)$$

۶. خانواده‌های مجموعه‌های اندیسدار

یادآوری می‌شود که مجموعه دسته‌ای از عنصرهای متمایز است. به عبارتی ساده ولی نه چندان دقیق، یک خانواده دسته‌ای از اشیاء است که ممکن است از یکدیگر متمایز نباشند. هر یک از این اشیاء عضو خانواده نامیده می‌شود. مثلاً، $\{a, a, a\}$ یک خانواده با سه عضو a, a, a است، اما همین خانواده $\{a, a, a\}$ اگر به عنوان یک مجموعه در نظر گرفته شود، مجموعه تک‌عنصری $\{a\}$ است که تنها یک عنصر a دارد.

فرض کنید Γ یک مجموعه است و با هر عنصر Γ مانند γ یک مجموعه A_γ متناظر است. خانواده تمام مجموعه‌های نظیر A_γ را خانواده مجموعه‌های اندیسدار گویند.

همچنین می‌گویند خانواده مجموعه‌ها با مجموعه Γ اندیس‌دار شده‌است و آن را با نماد زیر نشان می‌دهند

$$\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$$

مثلاً خانواده مجموعه‌های $\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}, \dots$ را می‌توان خانواده مجموعه‌های اندیس‌داری در نظر گرفت که با مجموعه اعداد طبیعی \mathbb{N} اندیس‌دار شده‌اند و در آن به‌ازای هر $n, A_n = \{n, 2n\}$. این خانواده مجموعه‌ها را می‌توان با نماد $\{\{n, 2n\} | n \in \mathbb{N}\}$ نشان داد.

يك خانواده دلخواه مجموعه‌ها ممکن است اندیس‌دار نباشد، اما در بسیاری از حالتها به آسانی می‌توان يك مجموعه Γ برای اندیس‌دار کردن خانواده مجموعه‌های داده شده پیدا کرد.

مثال ۷. خانواده \mathcal{C} متشکل از مجموعه‌های $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ را اندیس‌دار کنید.

حل: چون این خانواده شش عضو دارد که دو عضو آن مجموعه \mathbb{R} است، Γ را مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ انتخاب می‌کنیم و می‌نویسیم $A_1 = \emptyset, A_2 = \mathbb{N}, A_3 = \mathbb{Z}, A_4 = \mathbb{Q}, A_5 = \mathbb{R}$ و $A_6 = \mathbb{R}$. اکنون این خانواده‌ای است از مجموعه‌های اندیس‌دار.

تمام نمادهایی را که برای مجموعه‌ها به‌کار برده‌ایم، برای خانواده‌ها نیز به‌کار می‌بریم. به‌عنوان مثال، $\emptyset \in \mathcal{C}$ و $\mathbb{R}_+ \notin \mathcal{C}$ به این معنی است که \emptyset عضوی از خانواده \mathcal{C} است و \mathbb{R}_+ عضوی از \mathcal{C} نیست. همچنین می‌توانیم بنویسیم $\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}\}$. اکنون مفاهیم اجتماع \cup و اشتراك \cap (تعریفهای ۳ و ۴) را به خانواده مجموعه‌ها تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۶. گیریم \mathcal{C} خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌ها باشد. اجتماع مجموعه‌های خانواده \mathcal{C} ، مجموعه تمام عنصرهایی است که به یکی از مجموعه‌های خانواده \mathcal{C} ، مانند A ، متعلق هستند. این اجتماع را با نماد $\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$ یا $\bigcup \mathcal{C}$ نمایش می‌دهیم. بنا بر این

$$\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \{x \in U | x \in A, A \in \mathcal{C}\}$$

اگر خانواده \mathcal{C} با Γ اندیس‌گذاری شده باشد، می‌توان نماد دیگری را که در زیر می‌آید به‌کار برد.

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{x \in U | x \in A_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$$

اگر Γ ، مجموعه اندیس، متناهی باشد، یعنی به‌ازای يك عدد طبیعی $n, \Gamma = \{1, 2, \dots, n\}$ ، آنگاه اغلب به‌جای $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ از نمادهایی مانند

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{یا} \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

خانواده‌های مجموعه‌های اندییدار ۵۷

که به‌ذهن نزدیکتر هستند، استفاده می‌شود.

مثال ۸. اجتماع خانواده‌ی مجموعه‌های زیر را پیدا کنید

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \dots, \{n, n+1, \dots, 2n-1\}$$

حل. این خانواده‌ی مجموعه‌ها را می‌توان با $\Gamma = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ اندییداری کرد، در این صورت به‌ازای هر $i \in \Gamma$ ، $A_i = \{i, i+1, \dots, 2i-1\}$ ، مسئله برمی‌گردد به یافتن مجموعه‌ی $\bigcup_{i=1}^n \{i, i+1, \dots, 2i-1\}$. توجه کنید که هر عدد صحیح بین ۱ تا $2n-1$ به‌بعضی از این A_i ‌های این خانواده متعلق است، و هیچ عنصر دیگری به‌هیچ‌یک از این A_i ‌ها متعلق نیست. پس

$$\bigcup_{i=1}^n \{i, i+1, \dots, 2i-1\} = \{1, 2, 3, \dots, 2n-1\}$$

تعریف ۷. گیریم \mathcal{A} خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌هاست. اشتراك مجموعه‌های \mathcal{A} ، مجموعه‌ی تمام عنصرهایی است که به‌تمام مجموعه‌های \mathcal{A} تعلق دارند. اشتراك را با نماد $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ یا $\bigcap \mathcal{A}$ نشان می‌دهند. بنابراین

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \in U \mid x \in A, A \in \mathcal{A} \text{ هر به‌ازای هر } A \in \mathcal{A}\}$$

گزاره «به‌ازای هر $x \in A, A \in \mathcal{A}$ » را که در اینجا آمده است، می‌توان به‌صورت $\{A \in \mathcal{A} \rightarrow x \in A\}$ نیز بیان کرد. طرز بیان اخیر، همان‌گونه که در قضیه‌ی ۷ خواهیم دید، برای اثبات قضایا مزیت دارد. اگر خانواده‌ی \mathcal{A} با Γ اندییداری شده باشد، می‌توان نماد دیگری را که در زیر می‌آید به‌کار برد.

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{x \in U \mid x \in A_\gamma, \gamma \in \Gamma \text{ هر به‌ازای هر } \gamma \in \Gamma\}$$

اگر Γ ، مجموعه‌ی اندیس، متناهی باشد، یعنی به‌ازای یک عدد صحیح مثبت n ، $\Gamma = \{1, 2, \dots, n\}$ ، آنگاه همانند حالت اجتماع به‌جای $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ ، می‌نویسیم:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \quad \text{یا} \quad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

گیریم a و b دو عدد حقیقی هستند. منظور از فاصله‌ی باز (a, b) ، مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ است. پس اگر $a \geq b$ آنگاه $(a, b) = \emptyset$.

مثال ۹. اشتراك خانواده‌ی فاصله‌های باز زیر را پیدا کنید

$$(0, 1), (0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{3}), \dots$$

حل: باید مجموعه $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1/n)$ را بیابیم. آشکارا دیده می‌شود که خانواده داده شده يك دنباله از فاصله‌های «کاهشی» $(0, 1/n)$ است که در آن فاصله $(0, 1/n)$ ، وقتی که n بزرگ می‌شود، به مجموعه تهی \emptyset «می‌گراید». بدین جهت می‌توانیم حدس بزنیم که اشتراك $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1/n)$ باید مجموعه تهی باشد. حال ثابت می‌کنیم که این حدس درست است. برخلاف حکم، فرض کنیم که عدد حقیقی $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1/n)$ وجود دارد. آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ باید $0 < a < 1/n$ برقرار باشد. اما می‌دانیم که برای هر عدد ثابت $a > 0$ همیشه يك $n \in \mathbb{N}$ به اندازه کافی بزرگ وجود دارد که $a < 1/n$. این تناقض نشان می‌دهد که $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1/n) = \emptyset$.

قضیه ۷. بگیریم $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ خانواده تهی مجموعه‌ها است. یعنی $\Gamma = \emptyset$. آنگاه

$$\bigcup_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma = \emptyset \text{ (الف)}$$

$$\bigcap_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma = U \text{ (ب)}$$

برهان. (الف) برای اثبات $\bigcup_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma = \emptyset$ ، هم‌ارز آن «برای هر $x \in U$ ، $x \notin \bigcup_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma$ » را ثابت می‌کنیم

$$\text{نماد } \notin \quad x \notin \bigcup_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma \equiv \sim (x \in \bigcup_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma)$$

$$\text{تعریف } \quad \equiv \sim (x \in A_\gamma, \quad \gamma \in \emptyset \text{ يك})$$

$$\text{نقیض سازی سور (فصل ۱)} \quad \equiv (x \notin A_\gamma, \quad \gamma \in \emptyset \text{ هر})$$

$$\equiv (\gamma \in \emptyset \rightarrow x \notin A_\gamma)$$

چون $\gamma \in \emptyset$ يك تناقض است، بنا بر قضیه ۷ (ج) فصل ۱، گزاره اخیر برای هر $x \in U$ درست است. پس برهان قسمت (الف) کامل است.

(ب) ثابت می‌کنیم که برای هر $x \in U$ ، $x \in \bigcap_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma$. توجه کنید که

$$\text{تعریف } \quad x \in \bigcap_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma \equiv (x \in A_\gamma, \quad \forall \gamma \in \emptyset)$$

$$\equiv (\gamma \in \emptyset \rightarrow x \in A_\gamma)$$

چنانکه در برهان قسمت (الف) شرح دادیم، گزاره اخیر برای هر $x \in U$ راست است. پس اثبات کامل است.

خیلی از قضایای مربوط به اعمال روی تعدادی متناهی مجموعه را می‌توان به قضایایی که به اعمال روی يك خانواده دلخواه مجموعه‌ها مربوط می‌شوند تعمیم داد. مثلاً، قضیه زیر تعمیم قضیه دمورگن است. توصیه می‌شود دانشجو این قضیه را با قضیه ۶ مقایسه کند.

قضیه ۸. (تعمیم قضیه دمورگن). بگیریم $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌هاست. آنگاه

خانواده‌های مجموعه‌های اندیس‌دار ۵۹

$$(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)' = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A'_\gamma \quad (\text{الف})$$

$$(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)' = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A'_\gamma \quad (\text{ب})$$

برهان. ما فقط قسمت (الف) را ثابت می‌کنیم و قسمت (ب) را به دانشجو وا می‌گذاریم.

$$\text{تعریف ۱} \quad x \in \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \right)' \equiv \sim (x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)$$

$$\text{تعریف ۶} \quad \equiv \sim (\exists \gamma \in \Gamma)(x \in A_\gamma)$$

$$\text{نقیض سازی سور (فصل ۱)} \quad \equiv (\forall \gamma \in \Gamma)(x \notin A_\gamma)$$

$$\text{تعریف ۱} \quad \equiv (\forall \gamma \in \Gamma)(x \in A'_\gamma)$$

$$\text{تعریف ۷} \quad \equiv x \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A'_\gamma$$

پس بنا بر تعریف ۱، $(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)' = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A'_\gamma$

قضیه زیر یک تعمیم قضیه ۴ (الف) است.

قضیه ۹. (تعمیم قانونهای پخشپذیری). گیریم A یک مجموعه و $\mathcal{G} = \{B_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ یک خانواده دلخواه مجموعه‌هاست. آنگاه

$$A \cap \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma \right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap B_\gamma) \quad (\text{الف})$$

$$A \cup \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma \right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (A \cup B_\gamma) \quad (\text{ب})$$

برهان. (الف) عنصر x در مجموعه $A \cap \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma \right)$ اگر و تنها اگر $x \in A$ و $x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$ که مطابق تعریف ۶، هم‌ارز است با

$$x \in A \quad \text{و} \quad x \in B_\gamma \quad \gamma \in \Gamma \quad \text{به‌ازای یک}$$

بنابر تعریف ۴، شرط اخیر را می‌توان با عبارت

$$x \in A \cap B_\gamma \quad \gamma \in \Gamma \quad \text{به‌ازای یک}$$

بیان کرد، و این بنا بر تعریف ۶ به‌معنای $x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap B_\gamma)$ است. پس، بنا بر تعریف ۱،

$$A \cap \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma \right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap B_\gamma)$$

برهان قسمت (ب) به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود.

تمرین ۶.۲

۱. گیریم $A_1 = \{a, b, c, d\}$ ، $A_2 = \{b, c, d\}$ ، $A_3 = \{a, b, c, d\}$ ، $\Gamma = \{1, 2, 3, 4\}$ و $A_4 = \{a, b\}$ مجموعه‌های زیر را بیابید.

$$\bigcup_{i=1}^4 A_i \quad (\text{الف})$$

(ب) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

۲. برای هر دو عدد حقیقی a و b ، منظور از فاصله بسته $[a, b]$ مجموعه $\{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\}$ است. اگر $a > b$ ، آنگاه $[a, b] = \emptyset$. مجموعه‌های زیر را بیابید.

(الف) $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [0, 1/n]$

(ب) $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} [0, 1/n]$

(ج) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [0, 1/n]$

۳. گیریم A_k فاصله باز $(-1/k, 1/k)$ برای $k \in \mathbf{N}$ است. مجموعه‌های زیر را بیابید:

(الف) $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k$

(ب) $\bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_k$

۴. برای هر دو عدد حقیقی a و b ، مجموعه‌های $\{x \in \mathbf{R} | a < x \leq b\}$ و $\{x \in \mathbf{R} | a \leq x < b\}$ را فاصله‌های نیمباز یا فاصله‌های نیمبسته نامیده‌اند. آنها را به ترتیب با $(a, b]$ و $[a, b)$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌های زیر را بیابید.

(الف) $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} (k, k+1]$

(ب) $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} (-k, -k+1]$

(ج) $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} [k, k+1)$

(د) $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} [-k, k)$

۵. قضیه ۸ (ب) را ثابت کنید: $(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma})' = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}'$

۶. قضیه ۹ (ب) را ثابت کنید: $A \cup (\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_{\gamma}) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (A \cup B_{\gamma})$

۷. مجموعه زیر را به صورت اجتماع چند اشتراك بنویسید

(الف) $(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$

و همچنین مجموعه زیر را به صورت اشتراك چند اجتماع بنویسید.

(ب) $(A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3)$

[راه‌نمایی: قضیه ۹ را چندبار به کار برید.]

۸. مجموعه‌های زیر را به صورت اجتماع اشتراكها و اشتراك اجتماعها بسط دهید [مسئله ۷ را ببینید.]

(الف) $(\bigcup_{i=1}^m A_i) \cap (\bigcup_{j=1}^n B_j)$

(ب) $(\bigcap_{i=1}^m A_i) \cup (\bigcap_{j=1}^n B_j)$

۹. گیریم $\{A_{\gamma} | \gamma \in \Gamma\}$ و $\{B_{\delta} | \delta \in \Delta\}$ دو خانواده مجموعه‌ها هستند. مجموعه‌های زیر را به صورت اجتماع اشتراكها و اشتراك اجتماعها بسط دهید. [مسائل ۷ و ۸ را ببینید]

(الف) $(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}) \cap (\bigcup_{\delta \in \Delta} B_{\delta})$

(ب) $(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}) \cup (\bigcap_{\delta \in \Delta} B_{\delta})$

۷. پارادوکس راسل

در این مرحله ممکن است بسیاری از ما فکر کنیم که حداقل به طور شهودی، معنی مجموعه راسلی داریم. اکثر آنهایی که برای نخستین بار درس نظریه مجموعه‌ها را می‌گذرانند، ممکن است توجه نکنند که در نظر گرفتن «مجموعه تمام مجموعه‌ها» یا، «مجموعه جهانی» به معنای مطلق آن چه اشکالی دارد. در واقع مدت زمانی (حداقل از سال ۱۸۹۵ که گتورگ کانتور برای نخستین بار نظریه مجموعه‌ها را به وجود آورد، تا سال ۱۹۰۲ که پارادوکس راسل منتشر شد)، وجود مجموعه جهانی مطلق، فرضی مسلم بود. برتراند راسل (۱۸۷۲-۱۹۷۰)^۱ فیلسوف مشهور انگلیسی بود که در ۱۹۰۲ با اعلام این مطلب که قبول وجود مجموعه تمام مجموعه‌ها به تناقض منجر می‌شود، جماعت ریاضیدانان را به لرزه درآورد. این پارادوکس مشهور راسل است. ما این پارادوکس را به صورت دو لم ظاهراً متناقض بیان می‌کنیم و از آن يك قضیه نتیجه می‌گیریم.

لم ۱. فرض کنید که \mathcal{U} مجموعه تمام مجموعه‌ها وجود دارد. فرض کنید $R = \{S \in \mathcal{U} \mid S \notin S\}$ آنگاه $R \notin R$.

پرهان. برخلاف حکم فرض کنید که $R \in R$. آنگاه از تعریف مجموعه R نتیجه می‌شود $R \notin R$ ، که با فرض $R \in R$ متناقض است. با این تناقض $R \notin R$ ثابت می‌شود.

لم ۲. فرض کنید که \mathcal{U} مجموعه تمام مجموعه‌ها، وجود دارد. فرض کنید $R = \{S \in \mathcal{U} \mid S \notin S\}$ آنگاه $R \in R$.

۱. برتراند راسل (Bertrand Russell) در ۱۸ مه سال ۱۸۷۲ در شهر ترلک (Trelleck) واقع در ولز (Wales) متولد شد. چهار سال نداشت که والدین خود را از دست داد. پیش از ورود به تربیتی کالج دانشگاه کمبریج در سال ۱۸۹۰، خجالتی و آرام بود. پس از سه سال مطالعه ریاضیات به این نتیجه رسید که آنچه به او آموخته‌اند پر از اشتباه بوده است. کتابهای ریاضی خود را فروخت و به فلسفه گرائید. در کتاب تاریخی اصول ریاضیات (۱۹۱۰-۱۹۱۳، Principa Mathematica) که مشتمل بر سه جلد است و با همکاری وایتهد (Alfred North Whitehead) تألیف کرده است، کوشش نمود تئوری مجموعه‌ها را با اجتناب از پارادوکسها بازسازی کند. در ۱۹۱۸ چنین نوشت: «می‌خواهم در کنار جهان بایستم و به‌ورای تاریکی خیره شوم و کمی بیش از آنچه دیگران دیده‌اند، ببینم. می‌خواهم خردی اندک به جهان آدمیان بازگردانم.» مسلم است که بیش از خردی اندک به جهان عرضه کرد. در همان سال به علت اظهارنظری نامساعد درباره ارتش آمریکا، به زندان افتاد. در ۱۹۵۰ به دریافت فرمان لیاقت از پادشاه انگلستان و جایزه نوبل در رشته ادبیات نایل شد. در سالهای بعد تظاهرات زیادی بر علیه جنگ هسته‌ای به راه انداخت.

۲. بنا بر اصل تصریح، R يك مجموعه است و اغلب «مجموعه راسل» نامیده می‌شود.

برهان. برخلاف حکم فرض کنید که $R \notin R$. آنگاه چون $R \in \mathcal{U}$ ، از تعریف R نتیجه می‌شود $R \in R$. این یک تناقض است. پس $R \in R$.

قضیه ۱۰. مجموعه تمام مجموعه‌ها وجود ندارد.

برهان. بنا بر لم ۱ و ۲، مجموعه تمام مجموعه‌ها نمی‌تواند وجود داشته باشد. زیرا، وجود این مجموعه به تناقض « $R \in R$ و $R \notin R$ » منجر می‌شود.

هالموس این قضیه را چنین بیان می‌کند: «هیچ چیز شامل همه چیز نیست.»^۱

۸. یک توضیح تاریخی

عقیده عوم بر این است که ریاضیدان نامی گئورگ کانتور^۲ (۱۸۴۵-۱۹۱۸) تئوری نوین مجموعه‌ها را در ۱۸۹۵ به وجود آورد. او به‌هنگام مطالعه سریهای مثلثاتی متوجه شد که به وجود چنین نظریه‌ای نیاز است. کانتور نوشت: «منظور از مجموعه هر دسته‌ای از اشیاء متمایز در شعور یا فکر ماست به‌صورت یک کل» این تعریف مانع نمی‌شود کسی مجموعه تمام مجموعه‌ها را در نظر بگیرد همچنانکه برتراند راسل این کار را کرد. مشکل واقعی در تعریف کانتور برای مجموعه، لغت «دسته» است. دسته چیست؟ البته می‌توانیم به یک فرهنگ لغات نگاه کنیم و به چیزی شبیه به این تعریفها دست یابیم:

«دسته: گروهی از اشیاء گردآوری شده»

«گروه: یک گردایه یا دسته»

«گردایه: یک دسته»

با این تعریفها دردی دوا نمی‌شود. هنگامی که یک ریاضیدان تعریفی ارائه می‌دهد منظورش تنها آوردن یک مترادف مانند دسته به‌جای مجموعه و یا تعریف دوری که در فرهنگ لغات می‌یابیم، نیست. ظاهراً کانتور واقف نبود که واژه مجموعه واقعاً تعریف ناپذیر است.

برای اجتناب از هر مشکلی نظیر پارادوکس راسل در نظریه مجموعه‌ها، باید واژه‌های «مجموعه» و «عنصر» را به‌عنوان واژه‌های تعریف نشده، یا اولیه، بپذیریم و چند اصل موضوع، از جمله اصل موضوع تصریح و اصل موضوع مجموعه‌های توانی را که در بخش ۱۲ آمده‌اند، راهنمای این واژه‌های اصلی قرار دهیم. اصول موضوع دیگری را نیز غالباً در نظریه مجموعه‌ها می‌آورند، مانند « $A=B$ اگر و تنها اگر عناصر A همان عناصر B

1. Paul. R. Halmos, *Naive Set Theory*. D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1960, p. 6.

۲. گئورگ کانتور (Georg Cantor) در سال ۱۸۴۵ در سن پترزبورگ، روسیه، به دنیا آمد و در سال ۱۸۵۶ به آلمان رفت، ریاضیات را در دانشگاه برلین (۱۸۶۳-۱۸۶۹) فراگرفت و در دانشگاه هاله به تدریس پرداخت (۱۸۶۹-۱۹۰۵). یکی از مباحث مورد علاقه کانتور سریهای مثلثاتی بود، که او را به بررسی اصول آنالیز کشاند. یک نتیجه این بررسی، به وجود آوردن نظریه انقلابی مجموعه‌ها و حساب اعداد ترامتناهی بود.

باشند» (اصل موضوع تعمیم)، « \emptyset يك مجموعه است» (اصل موضوع مجموعه نهی)، «اگر A و B مجموعه باشند آنگاه $\{A, B\}$ نیز مجموعه است» (اصل موضوع جفت‌سازی)، و «اگر \emptyset مجموعه‌ای از مجموعه‌ها باشد آنگاه $\{\emptyset\}$ يك مجموعه است» (اصل موضوع اجتماع). پارادوکس راسل تنها پارادوکسی نبود که در نظریه مجموعه‌ها پدید آمد، کمی بعد از اینکه پارادوکس راسل منتشر شد، ریاضیدانان و منطق‌پویان پارادوکسهای بسیاری ساختند. نتیجه تمام این پارادوکسها این شد که بسیاری از ریاضیدانان و منطق‌پویان روی انواع زیادی نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها کار کردند. منظور هر يك از این نظریه‌ها این بود که از پارادوکسها احتراز شود و هسته اصلی نظریه مجموعه‌های کانتور محفوظ بماند. معیناً تا این زمان هنوز کسی موفق نشده است يك سیستم اصل موضوعی کاملاً رضایتبخش برای نظریه مجموعه‌ها ارائه دهد.

بسیار وجود مشکلات فوق‌الذکر، نظریه مجموعه‌های کانتور امروزه در تمام رشته‌های ریاضیات نوین وارد شده و ثابت شده است که در پایه‌گذاری آنالیز مدرن و توپولوژی اهمیت خاصی دارد. در واقع حتی ساده‌ترین سیستمهای اصل موضوعی کاملاً توسعه یافته نظریه مجموعه‌ها برای کار ریاضیات کلاسیک (مانند نظریه اعداد حقیقی و مختلط، جبر و توپولوژی و غیره) کاملاً کافی است.

۳

رابطه و تابع

این فصل را با بحثی دربارهٔ جفت‌های مرتب و حاصلضرب دکارتی دو مجموعه شروع می‌کنیم. سپس رابطه را به صورت مجموعه‌ای از جفت‌های مرتب تعریف می‌کنیم. به دقت به رابطهٔ نزدیک بین افراز و رابطهٔ هم‌ارزی در یک مجموعه می‌پردازیم. مفهوم تابع را به عنوان نوعی خاص از رابطه معرفی می‌کنیم. برای آماده کردن کسانی که می‌خواهند بیشتر در ریاضیات جدید کار کنند، ویژگی‌های مهم تابعها را بررسی می‌کنیم. در هر قسمت مثال‌های فراوانی می‌آوریم.

۱. حاصلضرب دکارتی دو مجموعه

برای هر دو شیء داده شده a و b ، می‌توانیم شیء جدید (a, b) را، به نام جفت مرتب a و b تشکیل دهیم^۱. صفت «مرتب» در اینجا، تأکید بر آن دارد که ترتیب نوشتن اشیاء a و b در داخل پرانتز مهم است. بنا بر این، (a, b) و (b, a) دو جفت مرتب متمایز هستند. باید توجه داشت که جفت مرتب (a, b) با مجموعه $\{a, b\}$ یکی نیست. یک شیء

۱. متأسفانه این نماد، وقتی a و b اعدادی حقیقی هستند، برای فاصلهٔ باز هم به کار می‌رود. اما همواره خواننده با کمی دقت به معنای مناسب آن در متن پی خواهد برد.

حاصلضرب دکارتی دو مجموعه ۶۵

رضایتبخش اما تا حدی پیچیده، این است که جفت مرتب (a, b) را مجموعه $\{a, \{a, b\}\}$ تعریف کنیم. از این تعریف به نتیجه $(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ و } b = d$ می‌رسیم. (مسئله ۲۱، تمرین ۱۰۳ را ببینید).

دوجفت مرتب (a, b) و (c, d) را مساوی گوئیم اگر و تنها اگر $a = c$ و $b = d$. مثلاً: $(x, y) = (7, 8)$ اگر و تنها اگر $x = 7$ و $y = 8$. در هندسه تحلیلی، صفحه دکارتی را می‌توان مجموعه تمام جفتهای مرتب اعداد حقیقی در نظر گرفت. بیان صوری این مفهوم چنین است:

تعریف ۱. A و B را دو مجموعه می‌گیریم. مجموعه تمام جفتهای مرتب (x, y) ، $x \in A$ و $y \in B$ را حاصلضرب دکارتی A و B نامیده با $A \times B$ نمایش می‌دهند. به زبان نمادی:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

a را مختص اول و b را مختص دوم جفت مرتب (a, b) می‌گویند.

مثال ۱. گیریم $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2\}$. حاصلضرب دکارتی $A \times B$ و $B \times A$ را بیابید.

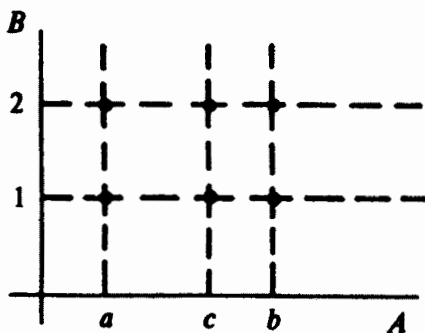
حل: بنا بر تعریف ۱ بالا، داریم

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

و

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

دیسه می‌شود که $A \times B \neq B \times A$. حاصلضرب دکارتی $A \times B$ را می‌توانیم مجموعه نقاط شکل زیر مجسم کنیم.



شکل ۷

مثال ۲. A یک مجموعه است. $A \times \emptyset$ و $\emptyset \times A$ را بیابید.

حل: چون $A \times \emptyset$ مجموعه تمام جفت‌های مرتب (a, b) است که در آن $a \in A$ و $b \in \emptyset$ ، و چون مجموعه تهی \emptyset عضوی ندارد، هیچ عضوی مانند b در \emptyset وجود ندارد، لذا $A \times \emptyset = \emptyset$. همچنین دیده می‌شود که $\emptyset \times A = \emptyset$.

قضیه ۱. A, B و C را سه مجموعه می‌گیریم. آنگاه

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \quad (\text{الف})$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad (\text{ب})$$

پرهان.

$$(a, x) \in A \times (B \cap C) \quad (\text{الف})$$

$$\text{تعریف ۱} \iff (a \in A) \wedge (x \in B \cap C)$$

$$\cap \text{ تعریف} \iff (a \in A) \wedge (x \in B \wedge x \in C)$$

$$\iff (a \in A) \wedge (a \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C) \quad \text{خودتوانی، شرکتپذیری (فصل ۱)}$$

$$\iff [(a \in A) \wedge (x \in B)] \wedge [(a \in A) \wedge (x \in C)] \quad \text{جا به جایی، شرکتپذیری (فصل ۱)}$$

$$\text{تعریف ۱} \iff [(a, x) \in A \times B] \wedge [(a, x) \in A \times C]$$

$$\cap \text{ تعریف} \iff (a, x) \in (A \times B) \cap (A \times C)$$

از این دو، بنا بر تعریف ۱ فصل ۲، ثابت کردیم که

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

این تساوی به زبانی ساده، چنین بیان می‌شود: حاصلضرب دکارتی نسبت به اشتراک بخشپذیر است. قسمت (ب) را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

قضیه ۲. اگر A, B و C سه مجموعه باشند، آنگاه

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

یعنی، حاصلضرب دکارتی نسبت به متممگیری بخشپذیر است.

پرهان.

$$(a, x) \in A \times (B - C)$$

$$\text{تعریف ۱} \iff (a \in A) \wedge (x \in B - C)$$

$$\iff (a \in A) \wedge [(x \in B) \wedge (x \notin C)] \quad \text{تعریف ۵ (فصل ۲)}$$

حاصلضرب دکارتی دو مجموعه ۶۷

$$\begin{aligned} \text{خود توانی، شرکتپذیری (فصل ۱)} & \iff (a \in A) \wedge (a \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C) \\ \text{جا به جایی، شرکتپذیری (فصل ۱)} & \iff [(a \in A) \wedge (x \in B)] \wedge [(a \in A) \wedge (x \notin C)] \\ \text{تعریف ۱} & \iff [(a, x) \in A \times B] \wedge [(a, x) \notin A \times C] \\ \text{تعریف ۵ (فصل ۲)} & \iff (a, x) \in (A \times B) - (A \times C) \end{aligned}$$

بنابراین، ثابت کردیم که

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

تمرین ۱۰۳

۱. هر يك از مجموعه‌های زیر را با رسم يك نمودار در صفحه دکارتی به طور هندسی نمایش دهید:

(الف) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$

(ب) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x > y\}$

(ج) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x + y| \leq 1\}$

۲. مجموعه‌های A و B چه شرایطی دارا باشند تا تساوی $A \times B = B \times A$ راست باشد؟
۳. قضیه ۱ (ب) را ثابت کنید: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
۴. ثابت کنید که $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset$.
۵. ثابت کنید که اگر A, B, C مجموعه باشند و $A \subseteq B$ ، آنگاه $A \times C \subseteq B \times C$.
۶. اگر مجموعه A ، عنصر m و مجموعه B ، عنصر داشته باشد، مجموعه $A \times B$ چند عنصر (جفت مرتب) دارد؟
۷. مجموعه $A \times A$ نه عنصر دارد که $(0, 1)$ و $(-1, 0)$ و دو عنصر آن هستند. مجموعه A و عنصرهای دیگر $A \times A$ را بیابید.
۸. درستی یا نادرستی (با آوردن يك مثال نقیض) هر يك از حکمهای زیر را ثابت کنید.
(الف) $A \times B \subseteq C \times D$ اگر و تنها اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq D$.
(ب) مجموعه توانی $A \times B$ ، یعنی $\mathcal{P}(A \times B)$ ، حاصلضرب دکارتی مجموعه‌های توانی $\mathcal{P}(A)$ و $\mathcal{P}(B)$ ، یعنی $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ است.
۹. اگر A, B, C, D چهارمجموعه باشند، ثابت کنید

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$$

۱۰. گیریم A_1, A_2, \dots, A_n مجموعه هستند. آیا می‌توانید تعریف ۱ را برای حاصلضرب دکارتی سه مجموعه $A_1 \times A_2 \times A_3$ ، تعمیم دهید؟ آیا می‌توانید این تعریف را برای حاصلضرب دکارتی n مجموعه بالا، یعنی $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ، تعمیم دهید؟

۱۱. ثابت کنید که اگر $A \times A = B \times B$ آنگاه $A = B$.
۱۲. ثابت کنید که اگر $A \times C = B \times C$ و $C \neq \emptyset$ ، آنگاه $A = B$.
۱۳. درستی یا نادرستی تساوی $(A \cup B) \times (A \cup C) = A \cup (B \times C)$ را بررسی کنید.
۱۴. ثابت کنید که $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
۱۵. آیا تساوی $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ صحیح است؟
۱۶. ثابت کنید که اگر $A \cap B = \emptyset$ آنگاه برای هر مجموعه C و هر مجموعه D ،
 $(A \times C) \cap (B \times D) = \emptyset$.
۱۷. فرض کنیم A, B, C, D و مجموعه‌های ناهمپوش باشند. ثابت کنید $A \times B = C \times D$ اگر و فقط اگر $A = C$ و $B = D$.
۱۸. ثابت کنید که

$$(A \times B) - (C \times C) = (A - C) \times B \cup A \times (B - C)$$

۱۹. ثابت کنید که

$$(A \times A) - (B \times C) = (A - B) \times A \cup A \times (A - C)$$

۲۰. ثابت کنید که

$$(A \times B) - (C \times D) = (A - C) \times B \cup A \times (B - D)$$

۲۱. جفت مرتب (x, y) را مجموعه $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ تعریف می‌کنیم. با استفاده از این تعریف ثابت کنید که $(a, b) = (c, d)$ اگر و تنها اگر $a = c$ و $b = d$.

۲. رابطه

دومجموعه A و B ، که الزاماً متمایز نیستند، داده شده‌اند. جمله «يك عنصر a از A با يك رابطه \mathcal{R} به يك عنصر b از B نظير شده است» گزاره‌ای است دربارهٔ جفت مرتب (a, b) در حاصلضرب دکارتی $A \times B$. از این رو، تعریف ریاضی رابطه را می‌توان برحسب جفتهای مرتب حاصلضرب دکارتی مجموعه‌ها بیان کرد.

تعریف ۲. يك زیرمجموعه حاصلضرب دکارتی $A \times B$ را يك رابطه \mathcal{R} از A به B می‌نامیم. معمولاً به جای $(a, b) \in \mathcal{R}$ می‌نویسند $a \mathcal{R} b$. نماد $a \mathcal{R} b$ خوانده می‌شود « a با \mathcal{R} به b مربوط است.»

اغلب مجموعه‌های A و B یکی هستند، در این صورت این دو مجموعه را X می‌نامیم و به جای اینکه بگوییم \mathcal{R} يك رابطه «از X به X » است، می‌گوییم \mathcal{R} يك رابطه در X است. مثلاً فرض کنید X مجموعه مردم شهر قزوین است و a (احمد) و b (برجیس) از اهالی قزوین هستند و \mathcal{S} رابطه (شوهر کسی بودن) است. آنگاه وقتی می‌گوییم a شوهر

* مسئله ۱۴ تکرار مسئله ۹ است.م.

b است، احمد و برجیس را يك جفت مرتب (a, b) متعلق به رابطه \mathcal{S} در نظر می گیریم. نماد $a\mathcal{S}b$ یا $(a, b) \in \mathcal{S}$ را می خوانیم « a شوهر b است».

همچنین می توانیم درجفت مرتب، برجیس را قبل از احمد بیاوریم و بگوییم برجیس زن احمد است. یا اگر \mathcal{Z} رابطه (زن کسی بودن) باشد، بگوییم جفت مرتب (b, a) به رابطه \mathcal{Z} متعلق است. $b\mathcal{Z}a$ یا $(b, a) \in \mathcal{Z}$ را می خوانیم: « b زن a است». در این مثال، رابطه \mathcal{Z} را وارون رابطه \mathcal{S} می گوئیم.

تعریف ۳. A و B را دو مجموعه، که الزاماً متمایز نیستند، فرض می کنیم. اگر رابطه ای از A به B باشد، آنگاه وارون رابطه \mathcal{R}^{-1} ، رابطه ای است از B به A به قسمی که $a\mathcal{R}^{-1}b$ اگر و تنها اگر $a\mathcal{R}b$ یعنی،

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

مثال ۳. (الف) گیریم $A = \{a, b\}$ ، $B = \{x, y, z\}$ ، و $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ به صورت $\mathcal{R}^{-1} = \{(x, a), (y, b)\} \subseteq B \times A$ آنگاه داده شده است. (ب) گیریم

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \text{کند } y \text{ را بخش می کند } x\}$$

آنگاه

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \text{است } x \text{ مضربی از } y\}$$

گیریم \mathcal{R} رابطه ای از A به B است. حوزه رابطه \mathcal{R} ، که با $\text{Dom}(\mathcal{R})$ نشان داده می شود،* مجموعه تمام عنصرهای A است به قسمی که $a\mathcal{R}b$ برای يك $b \in B$ و نگاره \mathcal{R} ، که با $\text{Im}(\mathcal{R})$ نشان داده می شود، مجموعه تمام عنصرهای B است به قسمی که $a\mathcal{R}b$ برای يك $a \in A$. به زبان نمادی

$$\text{Dom}(\mathcal{R}) = \{a \in A | (a, b) \in \mathcal{R}, b \in B \text{ يك}\}$$

و

$$\text{Im}(\mathcal{R}) = \{b \in B | (a, b) \in \mathcal{R}, a \in A \text{ يك}\}$$

در مثال مربوط به رابطه \mathcal{S} (شوهر کسی بودن) و \mathcal{Z} (زن کسی بودن) در شهر X (فزوین)، حوزه \mathcal{S} مجموعه تمام مردانی در X است که ازدواج کرده اند، و نگاره \mathcal{S} مجموعه تمام زنانی در X است که ازدواج کرده اند، در حالی که، حوزه \mathcal{Z} مجموعه تمام زنهای شوهر دار در X است و نگاره \mathcal{Z} مجموعه تمام شوهرها در X است. یعنی

* Dom حروف اول domain به معنای حوزه است و Im حروف اول image به معنای نگاره است. م.

$$\text{Dom}(\mathcal{Z}) = \text{Im}(\mathcal{S})$$

۹

$$\text{Dom}(\mathcal{S}) = \text{Im}(\mathcal{Z})$$

آیا می‌توانید يك نتیجه کلی بگیرید؟ (مسئله ۳ در آخر این بخش را ببینید).

مثال ۴. در مثال ۳ (الف)، $\text{Dom}(\mathcal{R}) = \{a, b\}$ و $\text{Im}(\mathcal{R}) = \{x, y\}$. در مثال ۳ (ب)،
 $\text{Dom}(\mathcal{R}) = \mathbb{N} = \text{Im}(\mathcal{R})$.

تعریف ۴. \mathcal{R} رابطه‌ای در مجموعه X است. می‌گوییم

(الف) \mathcal{R} انعکاسی است اگر و فقط اگر $x\mathcal{R}x$ ، $\forall x \in X$.

(ب) \mathcal{R} متقارن است اگر و فقط اگر $y\mathcal{R}x \Rightarrow x\mathcal{R}y$.

(پ) \mathcal{R} متعدی است اگر و فقط اگر $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

(ت) \mathcal{R} يك رابطه هم‌دزی است اگر و فقط اگر \mathcal{R} انعکاسی، متقارن، و متعدی باشد.

بدیهی است که رابطه تساوی، $=$ ، در مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} ، يك رابطه هم‌ارزی است. گیریم X مجموعه‌ای از گویهای رنگی است و فرض کنیم a با \mathcal{R} به b مربوط است اگر و تنها اگر a و b هم‌رنگ باشند. آنگاه \mathcal{R} يك رابطه هم‌ارزی است.

رابطه‌های هم‌ارزی در ریاضیات نوین از اهمیت خاصی برخوردارند. مثلاً، گروه‌های سازه در جبر، فضاهای خارج‌قسمت در توپولوژی، و دستگاه اعداد همنهشت در نظریه اعداد، همگی با نوعی از رابطه‌های هم‌ارزی مربوط هستند.

در يك مجموعه ناتهی مفروض X ، همواره حداقل دو رابطه هم‌ارزی وجود دارد؛ یکی از این دو، «رابطه قطری Δ_X » (یا «رابطه همانی») است که با

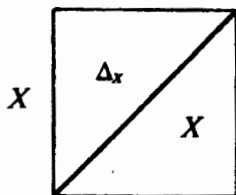
$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

تعریف می‌شود و هر عنصر را به خودش نظیر می‌کند. اگر X را با يك پاره خط نمایش دهیم، آنگاه $X \times X$ يك مربع و Δ_X قطر «اصلی» این مربع است.

رابطه هم‌ارزی دیگر که همیشه روی X وجود دارد، رابطه $\mathcal{R} = X \times X$ است. در بین تمام رابطه‌های هم‌ارزی که در زیرمجموعه‌های $X \times X$ ، روی X می‌توان تعریف کرد، Δ_X کوچکترین رابطه هم‌ارزی و $X \times X$ بزرگترین است.

مثال ۵. m عددی صحیح، مثبت، ثابت و دلخواه است. «رابطه همنهشتی \equiv » به بیمانه m (یا مدولو m) در مجموعه اعداد صحیح \mathbb{Z} ، با $x \equiv y \pmod{m}$ اگر و تنها اگر $x - y = km$ به‌ازای يك $k \in \mathbb{Z}$ ، تعریف می‌شود. رابطه همنهشتی يك رابطه هم‌ارزی روی \mathbb{Z} است.

۱. وقتی حوزه رابطه \mathcal{R} در X ، آشکارا خود X است، بسیاری از ریاضیدانان ترجیح می‌دهند که به‌جای «رابطه \mathcal{R} در X » بگویند «رابطه \mathcal{R} روی X ».



شکل ۸

پرهان. (الف) برای هر $x \in \mathbb{Z}$ ، چون $x - x \equiv 0 \pmod{m}$ ، داریم $x \equiv x \pmod{m}$. بنابراین رابطه انعکاسی است.

(ب) اگر $x \equiv y \pmod{m}$ ، آنگاه برای يك $k \in \mathbb{Z}$ ، $x - y = km$. در نتیجه $y - x = (-k)m$ و در آن $-k \in \mathbb{Z}$ ، پس $y \equiv x \pmod{m}$ و رابطه متقارن است.

(ج) اگر $x \equiv y \pmod{m}$ و $y \equiv z \pmod{m}$ ، آنگاه $x - y = k_1 m$ و $y - z = k_2 m$ ، بنابراین $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

$$x - z = (x - y) + (y - z) = (k_1 + k_2)m$$

و $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$ ، که نشان می‌دهد $x \equiv z \pmod{m}$. پس رابطه، متعدی است. بنابراین ما ثابت کردیم که رابطهٔ هم‌نهشتی (به پیمانه m) يك رابطهٔ هم‌ارزی روی \mathbb{Z} است.

به‌عنوان يك حالت خاص این مثال ۵، m را ۲ می‌گیریم. آنگاه $x \equiv y \pmod{2}$ اگر و تنها اگر $x - y$ يك عدد صحیح زوج باشد. در نتیجه $x \equiv y \pmod{2}$ اگر و تنها اگر x و y هر دو زوج یا هر دو فرد باشند.

تمرین ۲.۳

۱. \mathcal{R}^{-1} رابطه‌ای از A به B است. ثابت کنید $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$.

۲. گیریم $A = \{a, b, c\}$ و $\mathcal{R} = \{(a, c), (c, b), (a, b)\}$. حوزه و نگارهٔ \mathcal{R} را بیابید.

۳. \mathcal{R} رابطه‌ای از A به B است. ثابت کنید که

الف) $\text{Dom}(\mathcal{R}^{-1}) = \text{Im}(\mathcal{R})$

ب) $\text{Im}(\mathcal{R}^{-1}) = \text{Dom}(\mathcal{R})$

۴. گیریم $A = \{a, b, c\}$ و

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (c, a), (a, c)\}$$

ثابت کنید \mathcal{R} منعکس و متقارن است، اما متعدی نیست.

۵. رابطه‌ای مثال بیاورید که انعکاسی و متعدی باشد، اما متقارن نباشد.

۶. رابطه‌ای مثال بیاورید که متقارن و متعدی باشد، اما انعکاسی نباشد.

۷. \mathcal{R} رابطه‌ای در مجموعهٔ X است. ثابت کنید که

- (الف) \mathcal{R} انعکاسی است اگر و تنها اگر $\mathcal{R} \supseteq \Delta_X$.
- (ب) \mathcal{R} متقارن است اگر و تنها اگر $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$.
- (پ) \mathcal{R} انعکاسی است اگر و تنها اگر \mathcal{R}^{-1} انعکاسی باشد.
- (ت) \mathcal{R} متقارن است اگر و تنها اگر \mathcal{R}^{-1} متقارن باشد.
- (ث) \mathcal{R} متعدی است اگر و تنها اگر \mathcal{R}^{-1} متعدی باشد.
- (ج) \mathcal{R} يك رابطه هم‌ارزی است اگر و تنها اگر \mathcal{R}^{-1} يك رابطه هم‌ارزی باشد.
۸. چند رابطه روی يك مجموعه n عضوی وجود دارد؟
۹. چند رابطه از يك مجموعه m عضوی در يك مجموعه n عضوی وجود دارد؟
۱۰. فرض کنید \mathcal{R} يك رابطه از A به B است و $D \subseteq A$. منظور از تحدید \mathcal{R} به D ، رابطه $\mathcal{R}|D = \{(x, y) \in \mathcal{R} | x \in D\}$ از D به B است. ثابت کنید

$$\mathcal{R}|D = \mathcal{R} \cap (D \times \text{Im}(\mathcal{R}))$$

۱۱. ثابت کنید که اگر \mathcal{R} يك رابطه از A به B ، و D و E زیرمجموعه‌های A باشند، آنگاه
- (الف) $(\mathcal{R}|D \cup E) = (\mathcal{R}|D) \cup (\mathcal{R}|E)$.
- (ب) $(\mathcal{R}|D \cap E) = (\mathcal{R}|D) \cap (\mathcal{R}|E)$.
۱۲. فرض کنید \mathcal{R} يك رابطه از A به B و X يك زیرمجموعه دلخواه A باشد. $\mathcal{R}(X)$ ، \mathcal{R} به نام \mathcal{R} -نگاره X را چنین تعریف کنید

$$\mathcal{R}(X) = \{y \in B | x \in X \text{ يك } (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

ثابت کنید که اگر D و E زیرمجموعه‌های A باشند، آنگاه

$$\mathcal{R}(D \cup E) = \mathcal{R}(D) \cup \mathcal{R}(E) \quad (\text{الف})$$

$$\mathcal{R}(D \cap E) \subseteq \mathcal{R}(D) \cap \mathcal{R}(E) \quad (\text{ب})$$

۱۳. با در نظر گرفتن فرضهای مسئله ۱۲، ثابت کنید

$$\text{Dom}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^{-1}(B) \quad (\text{الف})$$

$$\text{Im}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}(A) \quad (\text{ب})$$

۱۴. اگر \mathcal{R} و \mathcal{S} رابطه‌هایی از A به B باشند، آنگاه $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ يك رابطه از A به B است. ثابت کنید

$$\text{Dom}(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = \text{Dom}(\mathcal{R}) \cup \text{Dom}(\mathcal{S}) \quad (\text{الف})$$

$$\text{Im}(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = \text{Im}(\mathcal{R}) \cup \text{Im}(\mathcal{S}) \quad (\text{ب})$$

$$(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})(X) = \mathcal{R}(X) \cup \mathcal{S}(X), X \subseteq A \quad (\text{پ})$$

۱۵. فرض کنید \mathcal{R} يك رابطه روی X است. ثابت کنید $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ يك رابطه متقارن روی X است و اگر \mathcal{S} يك رابطه متقارن روی X باشد که شامل \mathcal{R} است، آنگاه $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$. بنابراین $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ کوچکترین رابطه متقارن شامل \mathcal{R} است.

افراز و رابطه هم‌ارزی ۷۳

۱۶. فرض کنید \mathcal{R} یک رابطه روی X است. ثابت کنید $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ یک رابطه متقارن روی X است و اگر $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ یک رابطه متقارن روی X باشد به قسمی که $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ ، آنگاه $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$. بنا بر این بزرگترین رابطه متقارن مشمول \mathcal{R} است.

۱۷. ثابت کنید

$$(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \cup \mathcal{S}^{-1} \quad (\text{الف})$$

$$(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{S}^{-1} \quad (\text{ب})$$

۱۸. گیریم $(X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}))$. رابطه \sim روی X را با $(a, b) \sim (c, d)$ اگر و تنها اگر $ad = bc$ ، تعریف کنید. ثابت کنید که رابطه \sim یک رابطه هم‌ارزی است.

۳. افراز و رابطه هم‌ارزی

تعریف ۵. X مجموعه‌ای غیر تهی است. منظور از یک افراز X مانند \mathcal{P} ، یک مجموعه از زیرمجموعه‌های ناتهی X است به قسمی که

$$(\text{الف}) \text{ اگر } A, B \in \mathcal{P} \text{ و } A \neq B, \text{ آنگاه } A \cap B = \emptyset.$$

$$(\text{ب}) \bigcup_{C \in \mathcal{P}} C = X.$$

به تعبیری شهودی افراز X یک «تقسیم X » به قطعه‌های مجزای ناتهی است.

مثال ۶. m عددی صحیح، مثبت و ثابت است. به ازای هر عدد صحیح j ، $0 \leq j < m$ ، تعریف می‌کنیم $\{Z_j = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - j = km, k \in \mathbb{Z}\}$ ، آنگاه مجموعه

$$\{Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_{m-1}\}$$

یک افراز \mathbb{Z} است. در حالت خاص $m = 2$ ، مجموعه مجموعه‌های

$$Z_0 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ زوج است}\}$$

و

$$Z_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 \text{ زوج است}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ فرد است}\}$$

یک افراز \mathbb{Z} است. (مسئله ۸ تمرین ۳.۳ را نیز ببینید).

بین افراز یک مجموعه ناتهی و یک رابطه هم‌ارزی روی آن مجموعه ارتباط بسیار نزدیکی وجود دارد. برای درک این ارتباط، به تعریف زیر احتیاج داریم.

تعریف ۶. \mathcal{E} یک رابطه هم‌ارزی روی یک مجموعه ناتهی است. به ازای هر $x \in X$ ، مجموعه

$$x/\mathcal{E} = \{y \in X \mid y \mathcal{E} x\}$$

را دده هم‌ارزی مربوط به عنصر x تعریف می‌کنیم. مجموعه تمام این رده‌های هم‌ارزی در X را با X/\mathcal{E} نمایش می‌دهیم؛ یعنی $X/\mathcal{E} = \{x/\mathcal{E} \mid x \in X\}$. نماد X/\mathcal{E} را

« $X \text{ modulo } \mathcal{E}$ » یا فقط « $X \text{ mod } \mathcal{E}$ » می خوانیم.

قضیه ۳. \mathcal{E} يك رابطه هم ارزی روی يك مجموعه ناتهی X است. آنگاه

- (الف) هر x/\mathcal{E} يك زیرمجموعه ناتهی X است.
- (ب) $x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} \neq \emptyset$ اگر و تنها اگر $x \mathcal{E} y$.
- (ج) $x \mathcal{E} y$ اگر و تنها اگر $x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E}$.

برهان. (الف) چون برای هر $x \in X$ ، \mathcal{E} انعکاسی است، داریم $x \mathcal{E} x$. بنا بر تعریف \mathcal{E} ، $x \in x/\mathcal{E}$ و بنا بر این x/\mathcal{E} يك زیرمجموعه ناتهی X است.
(ب) چون \mathcal{E} يك رابطه هم ارزی و $X \neq \emptyset$ ، داریم

$$x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} \neq \emptyset \iff (\exists z)(z \in x/\mathcal{E} \wedge z \in y/\mathcal{E})$$

$$\iff (z \mathcal{E} x) \wedge (z \mathcal{E} y) \quad \text{تعریف } \mathcal{E}$$

$$\iff (x \mathcal{E} z) \wedge (z \mathcal{E} y) \quad \text{\mathcal{E} متقارن است}$$

$$\iff x \mathcal{E} y \quad \text{\mathcal{E} متعدی است}$$

(ج) از (الف) و (ب) به سادگی نتیجه می شود که $x \mathcal{E} y \Rightarrow x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E}$. حال باید ثابت کنیم که $x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E} \Rightarrow x \mathcal{E} y$. گیریم $x \mathcal{E} y$ ، آنگاه

$$\text{تعریف } \mathcal{E} \quad z \in x/\mathcal{E} \Rightarrow z \mathcal{E} x$$

$$\mathcal{E} \text{ متعدی است} \quad (z \mathcal{E} x) \wedge (x \mathcal{E} y) \Rightarrow z \mathcal{E} y$$

$$\text{تعریف } \mathcal{E} \quad \Rightarrow z \in y/\mathcal{E}$$

چون z اختیاری است، نتیجه می شود که $x/\mathcal{E} \subseteq y/\mathcal{E}$. استدلالی مشابه نتیجه می دهد که $y/\mathcal{E} \subseteq x/\mathcal{E}$. پس $x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E}$.

قضیه ۴. اگر \mathcal{E} يك رابطه هم ارزی روی يك مجموعه ناتهی X باشد، آنگاه X/\mathcal{E} يك افراز X است.

برهان. بنا بر قضیه ۳ (الف) و تعریف \mathcal{E} ، $X/\mathcal{E} = \{x/\mathcal{E} \mid x \in X\}$ خانواده ای از زیرمجموعه های ناتهی X است. اکنون نشان می دهیم که

$$x/\mathcal{E} \neq y/\mathcal{E} \Rightarrow (x/\mathcal{E}) \cap (y/\mathcal{E}) = \emptyset$$

برای این منظور عکس نقیض آن: $[x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E}] \Rightarrow [x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} \neq \emptyset]$ را ثابت می کنیم. اما این رابطه يك نتیجه مستقیم قضیه ۳ (ب) و (ج) است. بالاخره، باید نشان دهیم که $\bigcup_{x \in X} x/\mathcal{E} = X$. این نیز بدیهی است، زیرا هر $x \in X$ به x/\mathcal{E} متعلق است، به این ترتیب برهان قضیه کامل است.

هم اکنون در قضیه ۴ دیدیم که يك رابطه هم ارزی روی مجموعه ناتهی X ، يك افراز

X ایجاد می‌کند. اکنون نشان خواهیم داد که عکس قضیه ۴ نیز درست است؛ یعنی، هر افراز X يك رابطه هم‌ارزی روی X ایجاد می‌کند.

تعریف ۷. \mathcal{P} يك افراز مجموعه ناتهی X است. يك رابطه X/\mathcal{P} روی X با $x(X/\mathcal{P})y$ اگر و تنها اگر يك مجموعه $A \in \mathcal{P}$ وجود داشته باشد به قسمی که $x, y \in A$ ، تعریف می‌کنیم.

تذکر. به‌خواننده توصیه می‌شود تعاریف ۶ و ۷ را با دقت بخواند و با یکدیگر مقایسه کند، تا اختلاف ظریف بین نمادهای مشابه x/\mathcal{E} و X/\mathcal{E} را دریابد.

قضیه ۵. اگر \mathcal{P} يك افراز مجموعه ناتهی X باشد، آنگاه رابطه X/\mathcal{P} يك رابطه هم‌ارزی روی X است، و رده‌های هم‌ارزی که از رابطه هم‌ارزی X/\mathcal{P} به‌وجود می‌آیند دقیقاً مجموعه‌های افراز \mathcal{P} هستند. به‌زبان نمادی $X/(X/\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

برهان. چون هر عنصر X مانند x متعلق به یکی از $A \in \mathcal{P}$ است، $x(X/\mathcal{P})x$ ؛ پس X/\mathcal{P} انعکاسی است. تقارن X/\mathcal{P} يك نتیجه بدیهی تعریف ۷ است. برای اینکه نشان دهیم رابطه X/\mathcal{P} متعدی است، فرض کنید x, y و z سه عنصر X هستند که در شرطهای زیر صدق می‌کنند

$$x(X/\mathcal{P})y, \quad y(X/\mathcal{P})z$$

آنگاه، بنا بر تعریف ۷، A و B در \mathcal{P} وجود دارند به‌قسمی که $x, y \in A$ و $y, z \in B$. در نتیجه $y \in A \cap B \neq \emptyset$. از تعریف افراز، نتیجه می‌شود $A = B$. از این رو، $x, z \in A$ و بنابراین $x(X/\mathcal{P})z$. پس X/\mathcal{P} يك رابطه هم‌ارزی روی X است. برای اثبات بقیه قضیه، گیریم x يك عنصر اختیاری X باشد. يك فقط يك مجموعه A در \mathcal{P} وجود دارد به‌قسمی که $x \in A$ (چرا؟). در نتیجه، بنا بر تعریف ۶، داریم

$$x/(X/\mathcal{P}) = A$$

ثابت شده که هر رده هم‌ارزی مدولو X/\mathcal{P} يك مجموعه از خانواده \mathcal{P} است. برعکس فرض کنیم A يك مجموعه افراز \mathcal{P} باشد. چون $A \neq \emptyset$ ، يك عنصر x در X وجود دارد که متعلق به A است. پس با استدلال قبلی، $x/(X/\mathcal{P}) = A$. به‌این ترتیب ثابت شد که $X/(X/\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ و برهان قضیه کامل است.

هر رابطه هم‌ارزی \mathcal{E} روی مجموعه ناتهی X يك افراز X/\mathcal{E} (قضیه ۴) به‌وجود می‌آورد. با این افراز رابطه هم‌ارزی $X/(X/\mathcal{E})$ مشخص می‌شود (قضیه ۵). مهم است بدانیم که $X/(X/\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ (مسئله ۱۱ را ببینید). با این رابطه و رابطه $X/(X/\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ ارتباط نزدیک بین رابطه‌های هم‌ارزی و افرازا روشن می‌شود.

قضیه ۵ را با يك مثال خاص توضیح می‌دهیم. گیریم Z_0 و Z_1 به‌ترتیب مجموعه

اعداد صحیح زوج و مجموعه اعداد صحیح فرد باشند. آنگاه $\mathcal{P} = \{\mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_1\}$ يك افزاز
مجموعه اعداد صحیح \mathbb{Z} است. بنا بر تعریف رابطه \mathbb{Z}/\mathcal{P} ، داریم $a(\mathbb{Z}/\mathcal{P})b$ اگر و تنها
اگر یا $a, b \in \mathbb{Z}_0$ یا $a, b \in \mathbb{Z}_1$ یعنی $a(\mathbb{Z}/\mathcal{P})b$ اگر و تنها اگر a و b هر دو زوج
یا هر دو فرد باشند. به سادگی دیده می شود که این رابطه يك رابطه هم ارزی است. در واقع،
 $a(\mathbb{Z}/\mathcal{P})b$ اگر و تنها اگر $a \equiv b \pmod{2}$. بدین جهت، رابطه \mathbb{Z}/\mathcal{P} در واقع همان
رابطه هم نهشتی $(\text{mod } 2) \equiv$ است. [مثال ۵ را ببینید.]

برعکس اگر، مجموعه \mathbb{Z} و رابطه هم ارزی \mathcal{E} داده شده باشند به قسمی که $y \mathcal{E} x$
اگر و تنها اگر $x \equiv y \pmod{2}$ ، آنگاه

$$a/\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod{2}\} = \begin{cases} \mathbb{Z}_0 & \text{اگر } a \text{ زوج باشد} \\ \mathbb{Z}_1 & \text{اگر } a \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

بنا بر این $\mathbb{Z}/\mathcal{E} = \{\mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_1\}$ ، که آشکارا يك افزاز \mathbb{Z} است.

تمرین ۳.۳

۱. فرض کنید $X = \{a, b, c, d, e\}$ ، $A = \{a, b\}$ و $B = \{c, d, e\}$

(الف) تحقیق کنید که $\{A, B\}$ يك افزاز X است.

(ب) رابطه $X/\{A, B\}$ را که از افزاز $\{A, B\}$ پدید آمده است، بررسی کنید.

۲. فرض کنید $X = \{a, b, c, d\}$ و

$$\mathcal{R} = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b), (c, d), (d, c), (c, c), (d, d)\}$$

(الف) تحقیق کنید که \mathcal{R} يك رابطه هم ارزی روی X است.

(ب) افزاز X/\mathcal{R} را که از \mathcal{R} پدید آمده است، بیابید.

۳. فرض کنید \mathcal{P} افزاز X/\mathcal{R} مسئله ۲ ی بالا باشد. رابطه X/\mathcal{P} روی X را که از \mathcal{P}
پدید آمده است، بیابید.

۴. \mathcal{P} يك افزاز مجموعه نتهی X و رابطه هم ارزی X/\mathcal{P} مفروض اند. ثابت کنید

$$X/\mathcal{P} = \bigcup_{A \in \mathcal{P}} A \times A$$

۵. در مسئله ۱، چند عنصر در $A \times A \cup B \times B$ وجود دارد؟ چند جفت مرتب در $X/\{A, B\}$
وجود دارد؟

۶. X را يك مجموعه متناهی و \mathcal{P} ، افزاز X را

$$\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$$

بگیرید و فرض کنید مجموعه A_j ، $j = 1, 2, \dots, k$ ، n_j عضو دارد. ثابت کنید که

تعداد جفتهای مرتب در رابطه هم ارزی X/\mathcal{P} دقیقاً $n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_k^2$ است.

۷. گیریم $X = \{a, b, c, d, e\}$ و $\mathcal{P} = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}\}$

(الف) نشان دهید که \mathcal{P} يك افزاز X است.

(ب) رابطه هم‌ارزی X/\mathcal{P} روی X را به صورت مجموعه جفت‌های مرتب مشخص کنید.
 (پ) X/\mathcal{P} را \mathcal{E} بنامید و مجموعه‌های $a/\mathcal{E}, b/\mathcal{E}, c/\mathcal{E}, d/\mathcal{E}$ و e/\mathcal{E} را صریحاً مشخص کنید.

۸. مثال ۶ را به ازای $m=3$ بررسی کنید.
 ۹. X را Z ، مجموعه اعداد صحیح بگیریید. فرض کنید رابطه \mathcal{E} روی X بسا $y \mathcal{E} x$ اگر و تنها اگر $x - y = 5k$ ، که در آن k یک عدد صحیح است، تعریف شده است.
 (الف) ثابت کنید رابطه \mathcal{E} یک رابطه هم‌ارزی روی X است.
 (ب) X/\mathcal{E} ، افراز X را پیدا کنید.
 (ج) تحقیق کنید که رابطه هم‌ارزی $X/(X/\mathcal{E})$ در واقع همان رابطه هم‌ارزی \mathcal{E} است.

۱۰. فرض کنید $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ یک افراز مجموعه A ، و $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ یک افراز مجموعه B است. ثابت کنید

$$\{A_i \times B_j \mid i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n\}$$

یک افراز $A \times B$ است.

۱۱. \mathcal{E} یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه ناتهی X است. ثابت کنید $X/(X/\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

۴. تابع

بی‌شک، مفهوم تابع یکی از اساسی‌ترین مفاهیم در هر شاخه ریاضی است. ممکن است خواننده با تعریف زیر آشنا شده باشد. تابع یک قاعده تناظر است که به هر عنصر x از یک مجموعه (که حوزه تابع نامیده می‌شود) یک و فقط یک عنصر y از مجموعه دیگری را (که برد تابع نامیده می‌شود) نظیر می‌کند. این تعریف روشن نیست. دقیقاً منظور از یک «قاعده» چیست؟ برای اجتناب از هرگونه ابهامی، ریاضیدانان با استفاده از زبان مجموعه‌ها تعریفی دقیق برای تابع درست کرده‌اند.

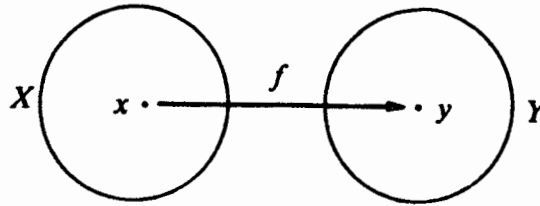
تعریف ۸. X و Y را دو مجموعه می‌گیریم. یک تسایع از X به Y ، یک سه‌گانه (f, X, Y) است که در آن f رابطه‌ای از X به Y است که در شرط‌های زیر صدق می‌کند:

$$\text{Dom}(f) = X \quad (\text{الف})$$

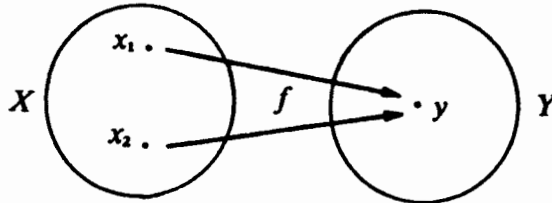
$$(ب) \text{ اگر } (x, y) \in f \text{ و } (x, z) \in f, \text{ آنگاه } y = z$$

فرض کنیم (f, X, Y) تابعی از X به Y باشد. از این به بعد ما هم به تبعیت از عرف به جای (f, X, Y) و $(x, y) \in f$ به ترتیب نمادهای معمولی $f: X \rightarrow Y$ و $y = f(x)$ را به کار خواهیم برد. اما دلیل اینکه « $y = f(x)$ » را می‌توان به جای « $(x, y) \in f$ » به کار برد، این است که

برای هر عنصر $x \in X$ یک و فقط یک $y \in Y$ وجود دارد به قسمی که $(x, y) \in f$.



شکل ۹. y نگاره x است.



شکل ۱۰. x_1 و x_2 پیشنگاره‌های y هستند.

برای اینکه ببینید این ادعا درست است، فرض کنید $x \in X$. آنگاه بنا بر شرط (الف) تعریف ۸، یک عنصر $y \in Y$ وجود دارد به قسمی که $(x, y) \in f$ ؛ اگر یک عنصر دیگر $z \in Y$ با شرط $(x, z) \in f$ وجود داشته باشد، آنگاه بنا بر شرط (ب)، $y = z$. حال می‌بینید، y که با $x \in X$ مشخص می‌شود یکتاست.

تابع $f: X \rightarrow Y$ مفروض است. اگر $y = f(x)$ ، گوییم y نگاره x تحت f است و x یک پیشنگاره y تحت f است. خواننده می‌تواند این مطلب را، همان گونه که در شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان داده شده، پیش خود مجسم کند. مامجموعه Y را، در $f: X \rightarrow Y$ برد تابع می‌گوییم. خواننده باید توجه داشته باشد که برد تابع ممکن است نگاره تابع نباشد! (به مثال ۷، در زیر نگاه کنید). توجه خواننده را به این حقیقت جلب می‌کنیم که بعضی از نویسندگان لغت «برد» را به معنی «نگاره» به کار می‌برند، اما به یک دلیل تکنیکی، که در بخش ۶ خواهید دید، بین «نگاره» و «برد» تابع تمایز قائل می‌شویم. در حالت کلی نگاره تابع زیرمجموعه‌ای از برد تابع است.

مثال ۷. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با $f(x) = [x]$ به ازای تمام x ‌های در \mathbb{R} تعریف شده است و $[x]$ به معنای بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از x یا مساوی با x است، مثلاً $[1] = 1$ و $[-1/2] = -1$. در اینجا برد f ، \mathbb{R} است، در حالی که نگاره f ، \mathbb{Z} است، که یک زیرمجموعه سرة \mathbb{R} می‌باشد.

۱. نگاره تابع $f: X \rightarrow Y$ ، نگاره رابطه f ، یعنی $\text{Im}(f)$ است. بنابراین

$$\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

می توان برد يك تابع را، بدون تغییر دادن تابع، عوض کرد. به عنوان نمونه، برای همان تابع مثال ۷ بالا، $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Q}$ و $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$ تابع هستند، زیرا در تعریف ۸ صدق می کنند. در حالت کلی، قضیه زیر را داریم:

قضیه ۶. تابع $f: X \rightarrow Y$ و W يك مجموعه شامل نگاره f مفروض اند. آنگاه $f: X \rightarrow W$ نیز يك تابع است.

پرهان. نخست ثابت می کنیم که f يك رابطه از X به W است:

تعریف Im	$(x, y) \in f \Rightarrow x \in X \wedge y \in (\text{Im } f)$
$\text{Im}(f) \subseteq W$	$\Rightarrow x \in X \wedge y \in W$
تعریف ۱	$\Rightarrow (x, y) \in X \times W$

ثابت شد که $f \subseteq X \times W$ ؛ به عبارت دیگر، f يك رابطه از X به W است. حال چون $f: X \rightarrow Y$ يك تابع است، $\text{Dom}(f) = X$ و شرط (ب) تعریف ۸ نیز برقرار است. بنابراین، $f: X \rightarrow W$ يك تابع است.

قضیه ۷. توابع $f: X \rightarrow Y$ و $g: X \rightarrow Y$ مفروض اند. آنگاه $f = g$ اگر و تنها اگر $\forall x \in X, f(x) = g(x)$

پرهان. (۱) فرض کنیم که $f = g$ و x يك عنصر دلخواه X باشد. آنگاه

نماد $y = f(x) \iff (x, y) \in f$

$f = g \iff (x, y) \in g$

نماد $\iff g(x) = y$

بنابراین $f(x) = g(x)$.

(۲) فرض کنیم که $\forall x \in X, f(x) = g(x)$. آنگاه

نماد $(x, y) \in f \iff y = f(x)$

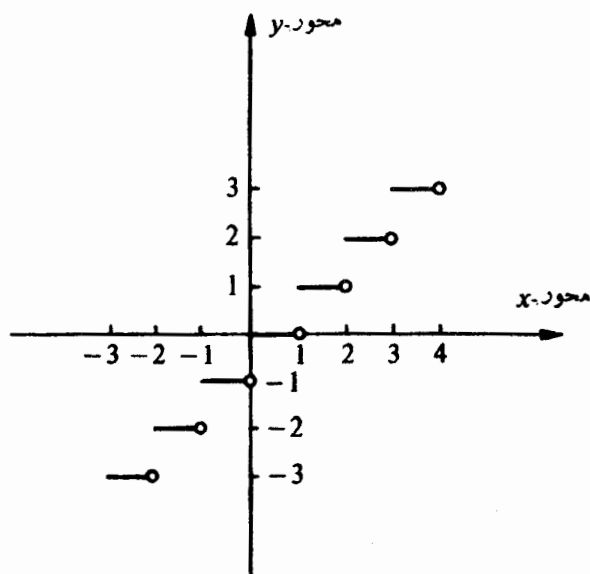
$f(x) = g(x) \iff y = g(x)$

نماد $\iff (x, y) \in g$

بنابراین $f = g$.

اگر حوزه و برد يك تابع زیر مجموعه هایی از مجموعه اعداد حقیقی باشند، آنگاه نظیر کاری که در هندسه تحلیلی می شود، نمودار تابع را می توان در يك صفحه دکارتی رسم کرد. مثلاً شکل ۱۱ نمودار تابع مثال ۷ است.

مثال ۸. فرض کنید A يك زیر مجموعه ناتهی X است. آنگاه رابطه



شکل ۱۱

$$\{(x, y) \in X \times \{0, 1\} \mid y = 1, x \in A \text{ و } y = 0, x \notin A\}$$

تابعی از X به $\{0, 1\}$ است. این تابع را تابع مشخصه A در X می نامند و آن را معمولاً با χ_A نمایش می دهند. حرف یونانی χ را χ تلفظ کنید. به عبارت دیگر

$$\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$$

به صورت زیر تعریف می شود:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \in A \\ 0 & \text{اگر } x \in X - A \end{cases}$$

اگر چه يك تابع، بنا بر تعریف، به صورت (f, X, Y) یا $f: X \rightarrow Y$ نوشته می شود، اما اغلب وقتی از متن به طور ضمنی حوزه و برد تابع مشخص می شوند، نوشتن آنها ضرورت ندارد. به این جهت وقتی حوزه و برد تابع معلوم هستند، تابع را به f نمایش خواهیم داد، بدون اینکه حوزه و برد f را ذکر کنیم.

مثال ۹. مجموعه X مفروض است. رابطه قطری Δ_X روی X که در صفحه ۷۰ تعریف شده است، يك تابع از X به X است. وقتی می خواهیم تأکید کنیم که رابطه Δ_X يك تابع است، نماد دیگر $I_X: X \rightarrow X$ را به کار می بریم. با این نماد، برای هر x در X ، $I_X(x) = x$. تابع I_X ، تابع همانی روی X نام دارد.*

* I حرف اول identity function، اصطلاح انگلیسی تابع همانی است.

مثال ۱۰. فرض کنیم X و Y دو مجموعه ناتهی و b یک عنصر ثابت Y باشد. با رابطه

$$C_b = \{(x, b) | x \in X\}$$

تابع $C_b: X \rightarrow Y$ به وجود می آید. تابع C_b را تابع ثابت می گویند و با $C_b(x) = b$ ، برای هر x در X ، مشخص می شود.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال، اغلب به توابعی که با دو قاعده تناظر (یا با بیش از دو قاعده) تعریف شده اند، برخورد کرده ایم. مثلاً تابع $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ که به صورت زیر داده شده است،

$$h(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{اگر } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{اگر } x \geq 0 \end{cases}$$

با دو قاعده تعریف شده است. این تابع ممکن است به صورت اجتماع دو تابع زیر در نظر گرفته شود:

$$(1) \quad f: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{که به صورت زیر تعریف شده است:}$$

$$f(x) = 1 - 2x, \quad \forall x \in (-\infty, 0]$$

$$(2) \quad g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{که به صورت زیر تعریف شده است:}$$

$$g(x) = x^2 + 1, \quad \forall x \in [0, +\infty)$$

خواننده باید توجه کند که در اینجا $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \{0\}$ و $f(0) = g(0)$. مثال اخیر قضیه عمومی زیر را موجب می شود.

قضیه ۸. دو تابع $f: A \rightarrow C$ و $g: B \rightarrow D$ به قسمی که $f(x) = g(x), \forall x \in A \cap B$ مفروض اند. آنگاه h ، اجتماع f و g :

$$h = f \cup g: A \cup B \rightarrow C \cup D$$

که در آن

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \in A \\ g(x) & \text{اگر } x \in B \end{cases}$$

یک تابع است.

برهان. چون f و g رابطه هستند، $f \subseteq A \times C$ و $g \subseteq B \times D$ ، و داریم

$$h = f \cup g \subseteq (A \times C) \cup (B \times D)$$

$$\subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$$

زیرا هر دو مجموعه $A \times C$ و $B \times D$ زیرمجموعه های $(A \cup B) \times (C \cup D)$ هستند.

بنابراین، h یک رابطه از $A \cup B$ به $C \cup D$ است. تحقیق درستی رابطه زیر را به عهده خواننده می‌گذاریم

$$\text{Dom}(h) = \text{Dom}(f) \cup \text{Dom}(g) = A \cup B$$

این نشان می‌دهد که رابطه h در تعریف h (الف) صدق می‌کند.

برای هر $x \in A \cup B$ ، می‌توان سه حالت زیر را در نظر گرفت.

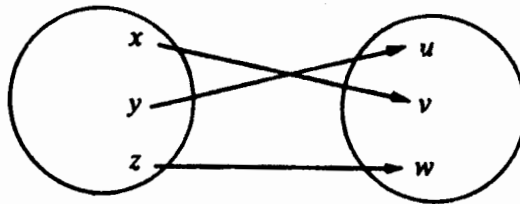
(۱) $x \in A - B$ ، (۲) $x \in B - A$ و (۳) $x \in A \cap B$. از اینکه $f: A \rightarrow C$ و $g: B \rightarrow D$ در تعریف h (ب) صدق می‌کنند و $\forall x \in A \cap B, f(x) = g(x)$ ، نتیجه می‌شود که $h(x)$ در هر سه حالت تعریف شده و یکتاست. بنابراین رابطه h در تعریف (ب) هم صدق می‌کند. از این رو $h: A \cup B \rightarrow C \cup D$ واقعاً یک تابع است.

تمرین ۴.۳

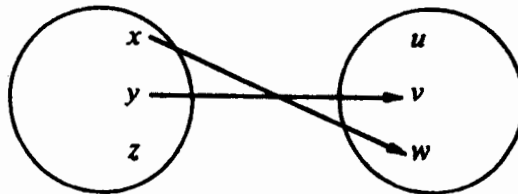
۱. بررسی کنید که با کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع از $X = \{x, y, z\}$ به

$Y = \{u, v, w\}$ تعریف می‌شود.

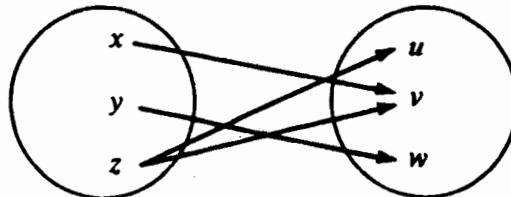
(الف)



(ب)



(ج)



۲. تابع $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ به صورت زیر تعریف شده است

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ -3 & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \end{cases}$$

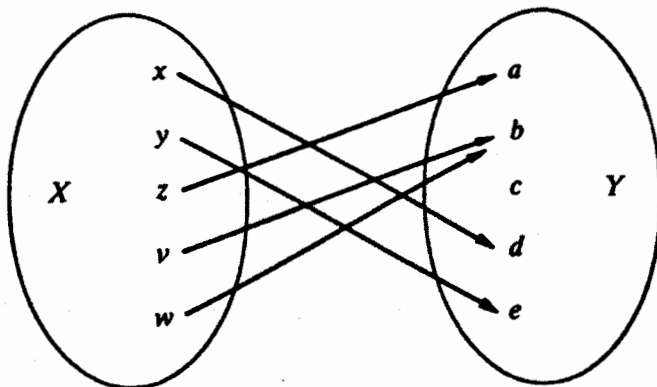
$f(1/3)$ ، $f(7)$ ، و $f(1.323232\dots)$ را بیابید.

۳. تابع $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} 4x+3 & \text{اگر } x > 5 \\ x^2-2 & \text{اگر } -6 \leq x \leq 5 \\ 4-5x & \text{اگر } x < -6 \end{cases}$$

$f(-7)$ ، $f(3)$ ، و $f(6)$ را بیابید.

۴. فرض کنید تابع $f: X \rightarrow Y$ با نمودار زیر تعریف شده است



نگاره این تابع چیست؟

۵. فرض کنید تابع $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ با $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ و $f(x) = x^2 - 3$

برای هر $x \in X$ تعریف شده است. نگاره تابع f را بیابید.

۶. هر یک از عبارتهای زیر یک تابع از \mathbf{R} به \mathbf{R} تعریف می کند. نگاره هر یک از این تابعها را بیابید.

(الف) $f(x) = 2x^2 + 5$

(ب) $g(x) = \cos x$

(پ) $h(x) = x^2 - 1$

۷. گیریم $X \subseteq Y$ و $f = \{(x, x) | x \in X\}$. ثابت کنید که $f: X \rightarrow Y$ یک تابع است.

[تذکره: این تابع را تابع شمولی می گویند و می توان آن را با $f: X \subseteq Y$ نشان داد.]

۸. مجموعه های $X = \{x, y, z\}$ و $Y = \{1, 2, 3\}$ مفروض اند. با کدام یک از عبارات زیر یک تابع از X به Y مشخص می شود؟ برای هر عبارت که تابع نیست، دلیل تابع

نیودن را ذکر کنید.

$$f = \{(x, 1), (y, 2), (z, 3)\} \text{ (الف)}$$

$$g = \{(x, 2), (y, 3), (z, 2)\} \text{ (ب)}$$

$$h = \{(x, 2), (y, 1)\} \text{ (ج)}$$

$$i = \{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (z, 3)\} \text{ (د)}$$

۹. در مسئله ۸، بالا،

(الف) رابطه‌های وارون f^{-1} ، g^{-1} ، h^{-1} و i^{-1} را بیابید.

(ب) کدام يك از رابطه‌های وارون در (الف)، تابعی از Y به X هستند، و کدام يك تابع نیستند؟ چرا؟

۱۰. آیا f^{-1} در مسئله ۴ يك تابع از Y به X هست؟

۱۱. اگر $X = \{x, y, z\}$ و $Y = \{1, 2\}$ ، چند تابع از X به Y وجود دارد؟ در حالت کلیتر، اگر مجموعه X ، m عنصر و مجموعه Y ، n عنصر داشته باشد، چند تابع از X به Y وجود دارد؟

۱۲. چند تا از توابع مسئله ۱۱، توابع ثابت هستند؟

۱۳. فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ يك تابع و A يك زیرمجموعه ناتهی X است. ثابت کنید که $f|_A: A \rightarrow Y$ تحدید تابع $f: X \rightarrow Y$ يك تابع است. [برای تعریف «تحدید» مسئله ۱۰، تمرین ۲۰۳ را ببینید.]

۱۴. تابع $f: X \rightarrow Y$ مفروض است. ثابت کنید که هر زیرمجموعه f مانند g نیز يك تابع است.

۱۵. فرض کنید $f: X \rightarrow X$ يك تسایع از X به X ، و همچنین يك رابطه انعکاسی روی X است. ثابت کنید که در این صورت f تابع همانی $I_X: X \rightarrow X$ است.

۱۶. فرض کنید X فاصله $[0, 1]$ است. يك تابع $f: X \rightarrow X$ بیابید که يك رابطه متقارن روی X باشد.

۱۷. فرض کنید که دو تابع $f: X \rightarrow Y$ و $g: X \rightarrow Y$ يك حوزه و يك برد دارند. ثابت کنید که اگر $f \subseteq g$ آنگاه $f = g$.

۵. نگاره و نگاره وارون مجموعه

یادآوری می‌شود که اگر $f: X \rightarrow Y$ يك تابع و x و y به ترتیب عنصرهایی از X و Y باشند به قسمی که $y = f(x)$ ، آنگاه y نگاره x است، و x يك پیش‌نگاره y است. این مفهوم طبعاً از عنصرها به زیرمجموعه‌ها، به صورت زیر تعمیم می‌یابد:

تعریف ۰۹. گیریم $f: X \rightarrow Y$ يك تابع، و A و B به ترتیب زیرمجموعه‌هایی از X و Y باشند.

تکرار و تکرار و آرون مجموعه ۸۵

(الف) نگاره A تحت f ، که با $f(A)$ نشان داده می‌شود، مجموعه تمام نگاره‌های $f(x)$ است به قسمی که $x \in A$.

(ب) نگاره B درون f ، که با $f^{-1}(B)$ نشان داده می‌شود، مجموعه تمام پیش‌نگاره‌های y های متعلق به B است.

با استفاده از نماد مجموعه‌ساز، $f(A)$ و $f^{-1}(B)$ با عبارتهای زیر بیان می‌شوند:

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

$$f^{-1}(B) = \{x | f(x) \in B\}$$

قضیه ۹. گیریم $f: X \rightarrow Y$ يك تابع است. آنگاه

(الف) $f(\emptyset) = \emptyset$

(ب) $\forall x \in X, f(\{x\}) = \{f(x)\}$

(ج) اگر $A \subseteq B \subseteq X$ ، آنگاه $f(A) \subseteq f(B)$

(د) اگر $C \subseteq D \subseteq Y$ ، آنگاه $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$

چون قضیه ۹ به آسانی از تعریف ۹ نتیجه می‌شود، اثبات آن به خواننده واگذار می‌شود.

قضیه ۱۰. تابع $f: X \rightarrow Y$ و $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ يك خانواده از زیرمجموعه‌های X مفروض‌اند. آنگاه

(الف) $f(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$

(ب) $f(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \subseteq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$

پروهان. (الف) تعریف ۹، و تعریف ۶ فصل ۲ را مکرر به کار می‌بریم، به دست می‌آید

$$y \in f\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) \iff y = f(x) \quad x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

$$\iff y = f(x) \quad \gamma \in \Gamma \text{ يا چنډ } x \in A_\gamma$$

$$\iff y \in f(A_\gamma) \quad \gamma \in \Gamma$$

$$\iff y \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

بنابراین، $f(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$

(ب) چون بنا بر قضیه ۹ (ج)، برای هر $\gamma \in \Gamma$ داریم $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \subseteq A_\gamma$ ، پس برای هر $\gamma \in \Gamma$ ، $f(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \subseteq f(A_\gamma)$ از تعریف ۷ فصل ۲ نتیجه می‌شود که

$$f(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \subseteq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

همچنانکه در مثال بعد می بینیم، نماد تساوی را نمی توان در قضیه ۱۰ (ب) به جای نماد شمول \subseteq گذاشت.

مثال ۱۱. گیریم $X = \{a, b\}$ ، $Y = \{c\}$ ، $\Gamma = \{1, 2\}$ ، $A_1 = \{a\}$ ، $A_2 = \{b\}$ ، و $f: X \rightarrow Y$ تابع ثابت $f(a) = f(b) = c$ باشد. آنگاه $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$ و $f(A_1) \cap f(A_2) = \{c\}$. این نشان می دهد که در همه حال $f(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$ درست نیست.

قضیه ۱۱. تابع $f: X \rightarrow Y$ و $\{B_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ خانواده ای از زیرمجموعه های Y مفروض اند. آنگاه

$$f^{-1}(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma) \quad (\text{الف})$$

$$f^{-1}(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma) \quad (\text{ب})$$

پروهان. (الف) تعریف ۹، و تعریف ۶ فصل ۲ را چند بار به کار می بریم، به دست می آید:

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) \iff f(x) \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$$

$$\iff f(x) \in B_\gamma \quad \gamma \in \Gamma \text{ يك يا چند}$$

$$\iff x \in f^{-1}(B_\gamma) \quad \gamma \in \Gamma \text{ يك يا چند}$$

$$\iff x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$$

بنابراین، ثابت شد که $f^{-1}(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$. (ب) با گذاشتن \bigcap به جای \bigcup و عبارت «به ازای هر» به جای «به ازای يك يا چند» در برهان قسمت (الف)، يك برهان قسمت (ب) به دست می آید. دانشجو باید، مرحله به مرحله، جایگزینی را تا آنجا که کاملاً قانع شود، انجام دهد.

قضیه ۱۲. گیریم $f: X \rightarrow Y$ يك تابع و B و C زیرمجموعه هایی از Y هستند. آنگاه

$$f^{-1}(B - C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$$

پروهان. به هم ارزیهای زیر توجه می کنیم:

$$\text{تعریف ۹} \quad x \in f^{-1}(B - C) \iff f(x) \in B - C$$

$$\text{تعریف ۵ (فصل ۲)} \quad \iff f(x) \in B \wedge f(x) \notin C$$

$$\text{تعریف ۹} \quad \iff x \in f^{-1}(B) \wedge x \notin f^{-1}(C)$$

$$\text{تعریف ۵ (فصل ۲)} \quad \iff x \in [f^{-1}(B) - f^{-1}(C)]$$

به این ترتیب ثابت می شود که

$$f^{-1}(B-C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$$

تمرین ۵.۳

۱. در مسئله ۲، تمرین ۴.۳، مقادیر زیر را بیابید

(الف) $f(\{-1, 0, 1\})$ ، $f(\{\sqrt{2}, \pi\})$ و $f(\{2, \log 2\})$

(ب) $f^{-1}(\{0, 1\})$ ، $f^{-1}(\{-3, 3\})$ ، $f^{-1}(\{4, 5\})$ و $f^{-1}(\{-3, 4, 5\})$

۲. در مسئله ۳، تمرین ۴.۳، مقادیر زیر را بیابید

(الف) $f(\{-7, 3, 6\})$ ، $f(\{-8, 2, 7\})$ و $f(\{-9, 1, 8\})$

(ب) $f^{-1}(\{0, 1\})$ ، $f^{-1}(\{-3, 3\})$ و $f^{-1}(\{1, 2, 3\})$

۳. در مسئله ۴، تمرین ۴.۳، مقادیر $f(\{v, w\})$ ، $f^{-1}(\{c\})$ و $f^{-1}(\{a, b\})$ را بیابید.

۴. گیریم $f: X \rightarrow Y$ یک تابع، و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ هستند. ثابت کنید

(الف) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

(ب) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

۵. گیریم $f: X \rightarrow Y$ یک تابع و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ هستند. مثالهایی بیاورید که نشان

دهد حکمهای زیر دروغ می باشند

(الف) اگر $B \neq \emptyset$ ، $f^{-1}(B) \neq \emptyset$

(ب) $f^{-1}(f(A)) = A$

(ج) $f(f^{-1}(B)) = B$

(د) $f(X) = Y$

۶. ثابت کنید که اگر $f(X) = Y$ ، مسئله ۵ (ج) راست است.

۷. گیریم تابع $f: X \rightarrow Y$ به قسمی است که $f(X) = Y$ و B و C زیرمجموعههایی از

Y هستند. ثابت کنید اگر $f^{-1}(B) = f^{-1}(C)$ ، آنگاه $B = C$. مثالی بیاورید که

نشان دهد که در حالت $f(X) \neq Y$ ، حکم نادرست است.

۸. گیریم X و Y دو مجموعه، و $p_X: X \times Y \rightarrow X$ و $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ به ترتیب

توابعی هستند که با $p_X(x, y) = x$ و $p_Y(x, y) = y$ برای تمام $(x, y) \in X \times Y$

داده شده اند. p_X و p_Y به ترتیب X تصویر و Y تصویر گفته می شوند. ثابت کنید که

اگر \mathcal{R} یک رابطه از X به Y باشد، یعنی $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ ، آنگاه $p_X(\mathcal{R}) = \text{Dom } \mathcal{R}$ ،

و $p_Y(\mathcal{R}) = \text{Im } \mathcal{R}$

۹. تابع $f: X \rightarrow Y$ و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ مفروض اند. ثابت کنید

(الف) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

$$f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B \quad (\text{ب})$$

۱۰. تابع $f: X \rightarrow Y$ و $B \subseteq Y$ مفروض اند. ثابت کنید

$$f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$$

۱۱. گیریم $f: X \rightarrow Y$ يك تابع، و A و B زیر مجموعه‌هایی از X هستند. مثالی بیاورید که نشان دهد عبارت زیر نادرست است.

$$f(A - B) = f(A) - f(B)$$

۱۲. قضیه ۹ را ثابت کنید.

۱۳. گیریم $f: X \rightarrow Y$ يك تابع است. ثابت کنید خانواده مجموعه‌های

$$\mathcal{P} = \{f^{-1}(y) \mid f^{-1}(y) \neq \emptyset, y \in Y\}$$

۱۴. تابع $f: X \rightarrow Y$ مفروض است. ثابت کنید رابطه

$$\mathcal{R}(f) = \{(a, b) \in X \times X \mid f(a) = f(b)\}$$

يك رابطه هم‌ارزی در X است.

۱۵. فرض کنیم f, \mathcal{P} و $\mathcal{R}(f)$ همانهایی باشند که در مسئله ۱۳ و ۱۴ عنوان شده‌است.

ثابت کنید $X/\mathcal{P} = \mathcal{R}(f)$ و $X/\mathcal{R}(f) = \mathcal{P}$.

۶. تابع يك به يك، پوششی، و دوسویی

در مطالعه توابع، مناسب می‌دانیم که سه نوع مهم از توابع را نامگذاری کنیم.

تعریف ۱۰. تابع $f: X \rightarrow Y$ يك به يك یا انژکتیو گفته می‌شود اگر $x_1, x_2 \in X$ و

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

بنابراین قانون عکس نقیض در منطق، این تعریف هم‌ارز است با اینکه بگوئیم تابع

$f: X \rightarrow Y$ يك به يك است اگر و تنها اگر از $x_1, x_2 \in X$ و $x_1 \neq x_2$ نتیجه شود

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

تعریف ۱۱. تابع $f: X \rightarrow Y$ سورژکتیو یا پوششی گفته می‌شود در صورتی که اگر $y \in Y$

آنگاه حداقل يك $x \in X$ وجود داشته باشد به قسمی که $f(x) = y$. تابع سورژکتیو،

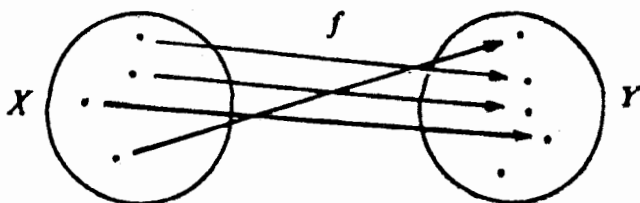
سورژکتیون نیز نامیده می‌شود. به عبارت دیگر، $f: X \rightarrow Y$ سورژکتیون است اگر و تنها اگر

$$f(X) = Y$$

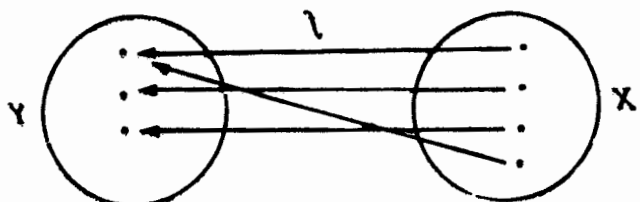
مثلاً، تابع مثال ۷، بخش ۴، پوششی نیست.

مثال ۱۲. تابع سینوسی $f: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$ که $f(x) = \sin x$ تعریف می‌شود پوششی

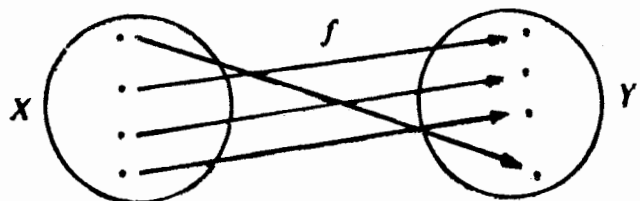
است. اما اگر به جای $[-1, 1]$ برد تابع \mathbf{R} باشد، آنگاه $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ پوششی نیست.



شکل ۱۲. $f: X \rightarrow Y$ يك به يك است.



شکل ۱۳. $f: X \rightarrow Y$ پوششی است.



شکل ۱۴. $f: X \rightarrow Y$ دوسویی است.

تعریف ۱۲. تابع $f: X \rightarrow Y$ دوسویی یا بیژکتیو گفته می‌شود اگر هم يك به يك باشد و هم پوششی. به تابع دوسویی، قناظر يك به يك نیز گفته می‌شود.

مثلاً، تابع همانی در مثال ۹، بخش ۴، يك دوسویی است. تعاریف ۱۵، ۱۱ و ۱۲ در شکل‌های ۱۲، ۱۳ و ۱۴ نشان داده شده‌اند. مجموعه‌های X و Y به صورت مجموعه‌هایی از نقاط داخل دایره‌ها نشان داده شده‌اند. در هر شکل، هر نقطه X با يك پیکان به يك نقطه Y مربوط شده است. با مجموعه جفت‌هایی که به این ترتیب به دست می‌آیند يك تابع $f: X \rightarrow Y$ مشخص می‌شود.

حکم قضیه ۱۵ (ب) را می‌توان برای تابع يك به يك به صورت بهتری در آورده.

قضیه ۱۳. گیریم $f: X \rightarrow Y$ يك به يك است و $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X هستند. آنگاه

$$f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

برهان. بنا بر تعریف ۹، و تعریف ۷ فصل ۲، داریم

$$y \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma) \iff y \in f(A_\gamma) \forall \gamma \in \Gamma$$

$$\iff (\exists x_\gamma \in A_\gamma, y = f(x_\gamma) \text{ که به قسمی که } \forall \gamma \in \Gamma$$

چون $f: X \rightarrow Y$ يك به يك است، همه این x_γ ها یکی هستند؛ این عنصر را با x_0 نشان می‌دهیم. پس داریم

$$y \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma) \iff \exists x_0 \in A \quad \forall \gamma \in \Gamma, y = f(x_0) \quad \text{که به قسمی که}$$

$$\iff \exists x_0 \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \quad y = f(x_0) \quad \text{که به قسمی که}$$

$$\iff y \in f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)$$

بنابراین، $f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$.

یادآوری می‌شود که اگر \mathcal{R} يك رابطه از X به Y باشد، آنگاه رابطه وارون آن

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

يك رابطه از Y به X است. چون تابع $f: X \rightarrow Y$ (نوع بخصوصی از) يك رابطه از X به Y است، f^{-1} حداقل يك رابطه از Y به X است. طبیعی است سؤال شود که چه وقت f^{-1} يك تابع است. جواب این سؤال در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۱۴. گیریم $f: X \rightarrow Y$ دوسویی است، آنگاه $f^{-1}: Y \rightarrow X$ دوسویی است.

برهان. نخست ثابت می‌کنیم که رابطه f^{-1} از Y به X يك تابع است. چون

$$f: X \rightarrow Y \text{ پوششی است، بنا بر مسئله ۳ (الف) تمرین ۲۰۳ داریم}$$

$$\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f) = Y$$

بنابراین شرط (الف) تعریف ۸ برقرار است. برای اینکه نشان داده شود که f^{-1} در شرط دیگر نیز صدق می‌کند، فرض می‌کنیم که $(y, x_1) \in f^{-1}$ و $(y, x_2) \in f^{-1}$. آنگاه داریم $(x_1, y) \in f$ و $(x_2, y) \in f$. در نتیجه $f(x_1) = f(x_2) = y$. حال چون $f: X \rightarrow Y$ يك به يك است، تساوی اخیر نتیجه می‌دهد که $x_1 = x_2$. در نتیجه ثابت کرده‌ایم که $f^{-1}: Y \rightarrow X$ يك تابع است.

برای اینکه نشان دهیم $f^{-1}: Y \rightarrow X$ يك به يك است، گیریم $y_1, y_2 \in Y$ و $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$. پس داریم $y_1 = f(x) = y_2$ و از این رو $y_1 = y_2$. این ثابت می‌کند که f^{-1} يك به يك است.

بالاخره باید نشان داده شود که $f^{-1}: Y \rightarrow X$ پوششی است. بنا بر مسئله ۳ (ب)، تمرین

تابع يك به يك، پوشی، و دوسوی ۹۱

۲۰۳، داریم $\text{Im}(f^{-1}) = \text{Dom}(f) = X$ ، که نشان می‌دهد f^{-1} پوشی است. به این ترتیب اثبات کامل است.

اگر $f: X \rightarrow Y$ دوسوی باشد، تابع $f^{-1}: Y \rightarrow X$ تابع وارون گفته می‌شود (مسئله ۱۷، تمرین ۶۰۳ را هم ببینید).
بنابرضیه ۱۴، اگر $f: X \rightarrow Y$ دوسوی باشد (= تناظر يك به يك)، می‌توانیم بگوییم f يك تناظر يك به يك بین مجموعه‌های X و Y است.

تمرین ۶۰۳

۱. کدام يك از توابع مسائل ۲، ۳ و ۴ تمرین ۴۰۳ يك به يك هستند؟ کدام يك پوشی هستند؟
۲. کدام يك از توابع مسائل ۵ و ۶ تمرین ۴۰۳ يك به يك هستند؟ پوشی هستند؟ دوسوی هستند؟
۳. گیریم $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ تابعی است که به ازای هر $x \in \mathbf{R}$ با $f(x) = 3x - 2$ تعریف شده است.

(الف) ثابت کنید که تابع f دوسوی است.

(ب) تابع وارون f ، یعنی f^{-1} ، را پیدا کنید.

۴. گیریم $g: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbf{R}$ تابعی است که به ازای هر x $-\pi/2 < x < \pi/2$ با $g(x) = \tan x$ تعریف شده است. آیا این تابع دوسوی است؟ اگر چنین است، تابع وارون آن را پیدا کنید.

۵. ثابت کنید که تابع مشخصه $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$ که در مثال ۸، بخش ۴ آمده است، پوشی است اگر و تنها اگر $A \neq \emptyset$ و $A \subset X$. چه وقت $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$ دوسوی می‌شود؟

۶. ثابت کنید که تابع ثابت $C_b: X \rightarrow Y$ پوشی است اگر و تنها اگر $Y = \{b\}$. چه وقت $C_b: X \rightarrow Y$ يك به يك می‌شود؟

۷. ثابت کنید که X -تصویر $p_X: X \times Y \rightarrow X$ و Y -تصویر $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ که در مسئله ۸، تمرین ۵۰۳ آمده‌اند، پوشی هستند. چه وقت X -تصویر يك به يك است؟

۸. ثابت کنید که يك تناظر يك به يك بین مجموعه اعداد طبیعی \mathbf{N} و مجموعه اعداد طبیعی زوج وجود دارد.

۹. ثابت کنید که يك تناظر يك به يك بین مجموعه اعداد صحیح \mathbf{Z} و مجموعه تمام اعداد صحیح فرد وجود دارد.

۱۰. گیریم X يك مجموعه متناهی با m عنصر و Y يك مجموعه متناهی با n عنصر است. ثابت کنید

(الف) اگر $m > n$ ، آنگاه هیچ تابع يك به يك $f: X \rightarrow Y$ وجود ندارد.

(ب) اگر $m \leq n$ ، آنگاه دقیقاً $n!/(n-m)!$ تابع يك به يك وجود دارد.

[به مسئله ۱۱، تمرین ۴۰۳ نگاه کنید.]

۱۱. گیریم X يك مجموعه متناهی با m عنصر است. چند تابع دوسویی از X روی X وجود دارد؟

[تذکر: يك تابع دوسویی از يك مجموعه متناهی روی خودش، در مواردی جایگشت نامیده می‌شود.]

۱۲. تابع $f: X \rightarrow Y$ و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ مفروض‌اند. ثابت کنید

(الف) اگر f يك به يك باشد، آنگاه $f^{-1}(f(A)) = A$.

(ب) اگر f پوششی باشد، آنگاه $f(f^{-1}(B)) = B$.

۱۳. عکس مسئله ۱۲ را ثابت کنید:

(الف) اگر برای هر $A \subseteq X$ ، $f^{-1}(f(A)) = A$ ، آنگاه f يك به يك است.

(ب) اگر برای هر $B \subseteq Y$ ، $f(f^{-1}(B)) = B$ ، آنگاه f پوششی است.

۱۴. فرض کنیم $f: X \rightarrow Y$ يك به يك است و $B \subset X$. ثابت کنید

$$f(X - B) = f(X) - f(B)$$

۱۵. گیریم $f: X \rightarrow Y$ يك به يك، و A و B زیرمجموعه‌های X هستند. ثابت کنید که

$$f(A - B) = f(A) - f(B)$$

[با مسئله ۱۱ تمرین ۵.۳ مقایسه کنید]

۱۶. فرض کنیم تابع $f: X \rightarrow X$ چنان باشد که برای هر $x \in X$ ، $f(f(x)) = x$. ثابت کنید f يك رابطه متقارن روی X است.

۱۷. عکس قضیه ۱۴ را ثابت کنید: فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ چنان تابعی است که f^{-1} تابعی از Y به X است. آنگاه $f: X \rightarrow Y$ دوسویی است.

۱۸. ثابت کنید $f: X \rightarrow Y$ يك به يك است اگر و تنها اگر برای تمام زیرمجموعه‌های X مانند A و B ،

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

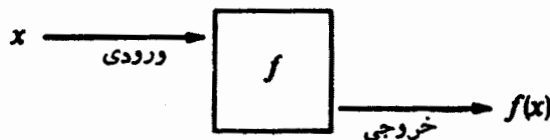
۱۹. عکس مسئله ۱۵ را ثابت کنید:

اگر برای تمام زیرمجموعه‌های X مانند A و B ، $f(A - B) = f(A) - f(B)$ ، آنگاه f يك به يك است.

۲۰. آیا عکس مسئله ۱۴ صحیح است؟

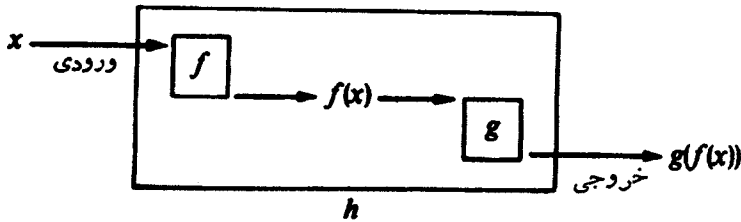
۷. ترکیب توابع

يك تابع $f: X \rightarrow Y$ را می‌توان ماشینی تصور کرد که شیئی اختیاری از مجموعه X مانند x را می‌گیرد، روی آن به طریقی عمل می‌کند، و آن را به شیئی جدید $f(x)$ تبدیل کرده تحویل می‌دهد. این تعبیر در شکل ۱۵ نشان داده شده است.



شکل ۱۵

ترکیب توابع ۹۳



شکل ۱۶

دو تابع $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$ به طوری که حوزه تابع دومی برد تابع اولی است، مفروض اند. این دو تابع را دو ماشین تصور کنید، مثلاً یکی ماشین لباسشویی و دیگری ماشین خشک کن. لازم نیست مخترع باشیم تا بتوانیم تصور کنیم که امکان دارد از ترکیب این دو ماشین، ماشین جدیدی بسازیم؛ ماشینی می‌سازیم که لباس چرک x را می‌شوید، آن را به لباس پاک و خیس $f(x)$ تبدیل می‌کند و سپس آن را خشک می‌کند. چیزی که از ماشین خارج می‌شود لباس پاک و خشک $g(f(x))$ است. این طرز فکر در شکل ۱۶ نشان داده شده است.

از «ترکیب» ماشینهای $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$ ، که با $h: X \rightarrow Z$ نمایش داده می‌شود، ماشین جدیدی به دست می‌آید که يك شيء دلخواه x مانند آن را می‌گیرد و آن را به شيء $h(x) = g(f(x))$ ، که یکی از اشیاء Z است، تبدیل می‌کند. نماد مرسوم برای h ، $g \circ f$ است و $g \circ f(x) = g(f(x))$ را «ترکیب» f و g می‌نامند. اکنون می‌توانیم تعریف زیر را ارائه دهیم.

تعریف ۱۳. دو تابع $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$ مفروض اند. ترکیب این دو تابع، تابع $g \circ f: X \rightarrow Z$ است که در آن به ازای هر x در X ، $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ به صورت دیگر

$$g \circ f = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y: (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g\}$$

مثال ۱۳. بگیریم $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع هستند که به ترتیب برای تمام x های در \mathbb{R} به صورت $f(x) = x + 1$ و $g(x) = x^2$ داده شده‌اند. ترکیب $(g \circ f)(x)$ و $(f \circ g)(x)$ را بیابید.

حل. با استفاده از تعریف ۱۳، داریم

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) & (1) \\ &= g(x+1) \\ &= (x+1)^2 \\ &= x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) & (۲) \\ &= f(x^2) \\ &= x^2 + 1\end{aligned}$$

از مثال ۱۳ نتیجه می‌شود که در حالت کلی $g \circ f \neq f \circ g$ و بنابراین، ترکیب تباهی، جابه‌جایی نیست.

قضیه ۰۱۵. ترکیب تباهی شرکتپذیر است. یعنی اگر $g: Y \rightarrow Z$ ، $f: X \rightarrow Y$ و $h: Z \rightarrow W$ آنگاه

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

پروهان. نخست توجه می‌کنیم که $h \circ (g \circ f)$ و $(h \circ g) \circ f$ هر دو توابعی از X به W هستند. پس، بنا بر قضیه ۷ بخش ۴ کافی است نشان دهیم که برای هر x در X ،

$$[h \circ (g \circ f)](x) = [(h \circ g) \circ f](x)$$

اما از تعریف ۱۳ نتیجه می‌شود که برای هر x در X

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x)))$$

و

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

از این دو رابطه دیده می‌شود که $\forall x \in X$ ، $[h \circ (g \circ f)](x) = [(h \circ g) \circ f](x)$ اکنون اثبات کامل است.

قضیه ۰۱۶. تابع $f: X \rightarrow Y$ مفروض است. آنگاه

(الف) اگر تابع $g: Y \rightarrow X$ وجود داشته باشد به طوری که $g \circ f = I_X$ (که در آن $I_X: X \rightarrow X$ تابع همانی است که در مثال ۹، بخش ۴ تعریف شده است)، آنگاه $f: X \rightarrow Y$ یک به یک است.

(ب) اگر تابع $h: Y \rightarrow X$ وجود داشته باشد به طوری که $f \circ h = I_Y$ ، آنگاه $f: X \rightarrow Y$ پوششی است.

پروهان. (الف) فرض کنید تابع $g: Y \rightarrow X$ به طوری که $g \circ f = I_X$ وجود دارد. آنگاه برای هر x_1 و x_2 در X به طوری که $f(x_1) = f(x_2)$ داریم:

$$x_1 = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = x_2$$

این نشان می‌دهد که $f: X \rightarrow Y$ یک به یک است.

ترکیب توابع ۹۵

(ب) فرض کنید تابع $h: Y \rightarrow X$ به طوری که $h \circ f = I_Y$ وجود دارد. آنگاه برای هر $y \in Y$ ، يك عنصر

$$x = h(y) \in X$$

وجود دارد به قسمی که

$$f(x) = f(h(y)) = (f \circ h)(y) = I_Y(y) = y$$

بنابراین تعریف ۱۱، $f: X \rightarrow Y$ پوششی است.

تمرین ۷.۳

۱. فرض کنید که دو تابع $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ و $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ به ترتیب با $f(x) = 2x^2 + 1$ و $g(x) = \cot x$ برای هر $x \in \mathbf{R}$ تعریف شده‌اند.

(الف) ترکیب $f \circ g$ را بیابید.

(ب) ترکیب $f \circ g$ را بیابید.

۲. فرض کنید که دو تابع $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ و $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ به ترتیب با $f(x) = \log_{10} x$ و $g(x) = 10^x$ برای هر $x \in \mathbf{R}$ تعریف شده‌اند.

(الف) ترکیب $g \circ f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ را بیابید.

(ب) ترکیب $f \circ g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ را بیابید.

۳. گیریم f, g, h و توابع داده شده در مسئله ۶، تمرین ۴.۳ هستند.

(الف) ترکیب $g \circ f$ را بیابید.

(ب) ترکیب $h \circ g$ را بیابید.

(پ) ترکیب $h \circ (g \circ f)$ را بیابید.

(ت) ترکیب $(h \circ g) \circ f$ را بیابید.

(ث) دو تابع $h \circ (g \circ f)$ و $(h \circ g) \circ f$ را که به دست آورده‌اید با هم مقایسه کنید؛ آیا آنها یکی هستند؟

۴. تابع $f: X \rightarrow Y$ مفروض است. ثابت کنید که $f \circ I_X = f = I_Y \circ f$.

۵. گیریم $f: X \rightarrow Y$ دوسویی و $f^{-1}: Y \rightarrow X$ تابع وارون f است. ثابت کنید که $f^{-1} \circ f = I_X$ و $f \circ f^{-1} = I_Y$.

۶. گیریم $f: X \rightarrow Y$ يك تابع است. اگر توابع $g: Y \rightarrow X$ و $h: Y \rightarrow X$ وجود داشته باشند به طوری که $g \circ f = I_X$ و $f \circ h = I_Y$ ، ثابت کنید $f: X \rightarrow Y$ دوسویی است و $g = h = f^{-1}$.

۷. دو تابع $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$ مفروض‌اند. ثابت کنید

(الف) اگر $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$ به يك به يك باشند، آنگاه $g \circ f: X \rightarrow Z$ نیز يك به يك است.

(ب) اگر $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$ پوششی باشند، آنگاه $g \circ f: X \rightarrow Z$ نیز

پوششی است.

۸. گیریم \mathcal{R} يك رابطه از X به Y و \mathcal{S} يك رابطه از Y به Z است. می توانیم، همانند ترکیب توابع، ترکیب این رابطه‌ها را با

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, z) \in X \times Z \mid (\exists y)[(x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{S}]\}$$

که رابطه‌ای از X به Z است، تعریف کنیم. ثابت کنید که

$$(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1} \quad (\text{الف})$$

(ب) اگر به علاوه \mathcal{J} يك رابطه از Z به W باشد، آنگاه $\mathcal{J} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = (\mathcal{J} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$

۹. فرض کنیم \mathcal{R} يك رابطه روی X است. ثابت کنید

(الف) $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \supseteq I_X$ متقارن است اگر و تنها اگر $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \supseteq I_X$

(ب) $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$ متعدی است اگر و تنها اگر $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$

۱۰. فرض کنید \mathcal{R} يك رابطه از X به Y و \mathcal{S} ، \mathcal{J} رابطه‌هایی از Y به Z هستند. ثابت کنید

$$(\mathcal{J} \cup \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = (\mathcal{J} \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$$

۱۱. فرض کنید \mathcal{R} و \mathcal{S} رابطه‌هایی از X به Y هستند و \mathcal{J} يك رابطه از Y به Z است. ثابت کنید

$$\mathcal{J} \circ (\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \subseteq (\mathcal{J} \circ \mathcal{R}) \cap (\mathcal{J} \circ \mathcal{S})$$

۱۲. گیریم $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$ دو تابع دوسویی هستند. ثابت کنید که

$g \circ f: X \rightarrow Z$ دوسویی است، و تابع وارون $(g \circ f)^{-1}: Z \rightarrow X$ ، ترکیب

$f^{-1}: Y \rightarrow X$ و $g^{-1}: Z \rightarrow Y$ تابعهای آن تابعهاست، که در آن تابعهای $f^{-1} \circ g^{-1}: Z \rightarrow X$

به ترتیب وارون توابع g و f هستند. خلاصه اینکه $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

جبر بول و کاربردهای آن

مطالعه جالب و مفید مجموعه‌ها در ارتباط با عملهای اجتماع، اشتراك و متممگیری به تجرید دستگاه جبری مهم و مفیدی منجر می‌شود که به جبر بول (به افتخار جورج بول* (1813-1864)، ریاضیدان و منطق‌دان) معروف است. در این فصل، ویژگیهای اصلی جبر بول و کاربرد آن در طراحی مدارهای الکترونیکی و مدارهای رقمی مطالعه شده‌است.

۱. جبر بول

تعریفهای هم‌ارز اما ظاهراً متفاوتی از جبر بول وجود دارد، ما به‌خاطر تشابه آن با ساختمان بعضی از مجموعه‌های مجموعه‌ها، تعریف زیر را انتخاب می‌کنیم. منظور از يك عمل دو تایی روی مجموعه S ، تابعی است مانند \circ از حاصلضرب دکارتی $S \times S$ به S . برای هر $(a, b) \in S \times S$ ، به جای $\circ(a, b)$ معمولاً $a \circ b$ می‌نویسیم.

تعریف ۱. جبر بول يك سه‌گانه $(\mathcal{B}, +, \cdot)$ است که در آن \mathcal{B} يك مجموعه غیر تهی، و

* George Boole (1813-1864)

$+$ و \cdot دو عمل دوتایی روی \mathcal{B} هستند که به ازای هر $a, b, c \in \mathcal{B}$ در شرطهای (الف) تا (۸) صدق می‌کنند:

(الف) جا به جایی: $a + b = b + a$

$a \cdot b = b \cdot a$

(ب) شرکت پذیری: $a + (b + c) = (a + b) + c$

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(ج) پخش پذیری: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

(د) یک‌ها: عضوهای $0, 1 \in \mathcal{B}$ یا شرط $0 \neq 1$ وجود دارند به قسمی که

$a + 0 = a$ و $a \cdot 1 = a$

(۸) متمم‌گیری: برای هر $a \in \mathcal{B}$ ، عضو $a' \in \mathcal{B}$ وجود دارد به قسمی که

$a + a' = 1$ و $a \cdot a' = 0$

عملهای $+$ و \cdot به ترتیب جمع (یا) و ضرب (و) نامیده می‌شوند. عضوهای 0 و 1 در (د)، گرچه هیچ‌گونه ربطی با اعداد 0 و 1 ندارند، عنصرهای جفت و همانی گفته می‌شوند. عضو a' در (۸) متمم a گفته می‌شود.

مثال ۱. گیریم $\mathcal{B}_2 = \{0, 1\}$ و عملهای دوتایی $+$ و \cdot روی \mathcal{B}_2 با جدولهای زیر داده شده‌اند

جدول ۱

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

\cdot	0	1
0	0	0
1	0	1

آنگاه، سه‌گانه $(\mathcal{B}_2, +, \cdot)$ در تعریف جبر بول صدق می‌کند. بنا بر (د) بدیهی است که تعداد عضوهای این جبر بول کمترین است. عضوهای $0'$ و $1'$ را بیابید.

مثال ۲. U مجموعه‌ای است غیرتهی. در مجموعه توانی $\mathcal{P}(U)$ ، گیریم برای هر

بنا بر تعریف ۱ (الف) $A \cdot B = A \cap B$ و $A + B = A \cup B$ ، $A, B \in \mathcal{P}(U)$ آنگاه $(\mathcal{P}(U), +, \cdot)$ يك جبر بول است.

مثال ۳. گیریم \mathcal{B} مجموعه کلاسهای هم ارزی منطقی گزاره‌های پدیدآمده از مجموعه‌ای از گزاره‌های ساده $\{p, q, r, \dots\}$ است. آنگاه سه گانه $(\mathcal{B}, \vee, \wedge)$ يك جبر بول است که در آن 0 کلاس تناقضها و 1 کلاس راستگوها است. برای $a \in \mathcal{B}$ ، a' چیست؟

اکنون آماده‌ایم چند قضیه اساسی در جبر بول را ثابت کنیم.

قضیه ۱. در جبر بول،

(الف) 0 و 1 یکتا هستند.

(ب) برای هر a در \mathcal{B} ، a' یکتا است.

برهان. (الف) گیریم $0 \neq 0'$ عنصر صفر دیگر در \mathcal{B} باشد. داریم

$$0 = 0 + 0' \quad \text{بنا بر تعریف ۱ (د)}$$

$$= 0 + 0 \quad \text{بنا بر تعریف ۱ (الف)}$$

$$= 0 \quad \text{بنا بر تعریف ۱ (د)، زیرا } 0 \text{ عنصر صفر است}$$

برهان یکتایی 1 با آنچه گفته شد مشابه است.

(ب) گیریم x يك عضو \mathcal{B} است به قسمی که $a+x=1$ و $a \cdot x=0$. آنگاه

$$x = x \cdot 1 \quad \text{تعریف ۱ (د)}$$

$$= x \cdot (a + a') \quad \text{تعریف ۱ (ب)}$$

$$= (x \cdot a) + (x \cdot a') \quad \text{تعریف ۱ (ج)}$$

$$= (a \cdot x) + (x \cdot a') \quad \text{تعریف ۱ (الف)}$$

$$= 0 + (x \cdot a') \quad \text{چون } a \cdot x = 0$$

$$= x \cdot a' \quad \text{تعریف ۱ (د)}$$

همچنین، می‌توان ثابت کرد که $a' = x \cdot a'$. بنا بر این $x = a'$ و از این رو a' یکتا است.

قضیه ۲. برای هر $a \in \mathcal{B}$ ، $(a')' = a$.

برهان این قضیه به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۳ را ببینید).

قضیه ۳. عملهای $+$ و \cdot خود توان هستند:

$$a \cdot a = a \quad \text{و} \quad a + a = a, \quad a \in \mathcal{B}$$

برهان.

$$\begin{aligned} \text{تعریف ۱ (د)} \quad a+a &= (a+a) \cdot 1 \\ \text{تعریف ۱ (ه)} \quad &= (a+a) \cdot (a+a') \\ \text{تعریف ۱ (ج)} \quad &= a+(a \cdot a') \\ \text{تعریف ۱ (ه)} \quad &= a+0 \\ \text{تعریف ۱ (د)} \quad &= a \end{aligned}$$

برهان $a \cdot a = a$ به خواننده واگذار می‌شود.

قضیه ۴. در جبر بول، $0' = 1$ و $1' = 0$.

برهان. بنا بر تعریف ۱ (الف) و ۱ (د) داریم $1+0=1$ و $0+1=1$ و از تعریف ۱ (د) داریم $0 \cdot 1 = 0$ ، پس بنا بر تعریف ۱ (ه) و قضیه ۱ (ب) داریم $0' = 1$. معادله دوم $1' = 0$ به همین ترتیب، یا با به کار بردن قضیه ۲ برای $1' = 0'$ ثابت می‌شود.

قضیه ۵. برای هر $a \in \mathcal{B}$ ، $a+1=1$ و $a \cdot 0=0$.

برهان.

$$\begin{aligned} \text{تعریف ۱ (ه)} \quad a+1 &= a+(a+a') \\ \text{تعریف ۱ (ب)} \quad &= (a+a)+a' \\ \text{قضیه ۳} \quad &= a+a' \\ \text{تعریف ۱ (ه)} \quad &= 1 \end{aligned}$$

برهان $a \cdot 0 = 0$ به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

قضیه ۶. قانون دمورگن: برای هر $a, b \in \mathcal{B}$ داریم

$$(a+b)' = a' \cdot b' \quad \text{و} \quad (a \cdot b)' = a' + b'$$

برهان. برای اثبات قسمت اول، بنا بر تعریف ۱ (ه) و قضیه ۱ (ب) کافی است نشان دهیم که $(a+b) + (a' \cdot b') = 1$ و $(a+b) \cdot (a' \cdot b') = 0$. اما داریم

$$\begin{aligned} \text{تعریف ۱ (ج)} \quad (a+b) + (a' \cdot b') &= [(a+b)+a'] \cdot [(a+b)+b'] \\ \text{تعریف ۱ (الف) و ۱ (ب)} \quad &= [a' + (a+b)] \cdot [a + (b+b')] \\ \text{تعریف ۱ (ب) و ۱ (ه)} \quad &= [(a'+a)+b] \cdot [a+1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{تعریف ۱ (ه)} &= (1+b) \cdot (a+1) \\ \text{تعریف ۱ (الف)، قضیه ۵} &= 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

برهان $0 = (a+b) \cdot (a' \cdot b')$ و قسمت دوم قضیه به عنوان تمرین واگذار می‌شوند.

جبر بول $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap)$ نقش مهمی در مطالعهٔ جبرهای بول مجرد دارد. اگر $(\mathcal{B}, +, \cdot)$ یک جبر بول متناهی باشد، آنگاه می‌توان ثابت کرد که یک مجموعهٔ متناهی U وجود دارد به قسمی که $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap)$ دقیقاً دارای همان خواص جبری $(\mathcal{B}, +, \cdot)$ است و بنابراین $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap)$ را می‌توان کاملاً به جای $(\mathcal{B}, +, \cdot)$ به کار برد. اگر \mathcal{B} نامتناهی باشد، این مطلب دقیقاً درست نیست، اما $(\mathcal{B}, +, \cdot)$ را می‌توان بایک زیرخانوادهٔ $\mathcal{P}(U)$ از یک مجموعهٔ نامتناهی مناسب U ، تطبیق داد.

تمرین ۱۰۴

۱. نشان دهید که $(\mathcal{B}, +, \cdot)$ در مثال ۱ کوچکترین جبر بول است.
۲. نشان دهید که $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap)$ در مثال ۲، در شرایط تعریف ۱ از (الف) تا (ه) صدق می‌کند.
۳. قضیهٔ ۲ را ثابت کنید: برای هر $a \in \mathcal{B}$ ، $(a')' = a$.
۴. آیا می‌توانید جبر بولی بسازید که دقیقاً سه عنصر داشته باشد؟ چرا؟
۵. آیا یک جبر بول می‌تواند عنصری مانند a داشته باشد به طوری که $a' = a$ ؟
۶. ثابت کنید که برای هر a متعلق به \mathcal{B} داریم $a \cdot a = a$.
۷. ثابت کنید که $1' = 0$.
۸. ثابت کنید که $0 \cdot 0 = 0$.
۹. قانونهای جذب زیر را ثابت کنید:
 (الف) $a + (a \cdot b) = a$
 (ب) $a \cdot (a + b) = a$
۱۰. ثابت کنید که $0 = (a+b) \cdot (a' \cdot b')$.
۱۱. قسمت دوم قضیهٔ ۶ را ثابت کنید: $(a \cdot b)' = a' + b'$.
۱۲. ثابت کنید که اگر $a + b = 0$ آنگاه $a = 0$ و $b = 0$.
۱۳. ثابت کنید که اگر $a \cdot b = 1$ آنگاه $a = 1$ و $b = 1$.
۱۴. ثابت کنید که $a \cdot (a' + b) = a \cdot b$.
۱۵. گیریم a و b دو عضو یک جبر بول هستند. ثابت کنید که چهار شرط زیر هم‌ارزند.
 (الف) $a + b = b$
 (ب) $a' + b = 1$
 (ج) $a \cdot b = a$
 (د) $a' \cdot b = 0$

۱۶. دريك جبر بول \mathcal{B} ، می‌گوییم a مقدم بر b است و آن را با $a \leq b$ نشان می‌دهیم، اگر و تنها اگر یکی از چهار شرط مسئله ۱۵ برقرار باشد. ثابت کنید

(الف) \leq انعکاسی است: برای هر $a, a \in \mathcal{B}$ ، $a \leq a$.

(ب) \leq متعدی است: اگر $a \leq b$ و $b \leq c$ آنگاه $a \leq c$.

(ج) \leq پادمتقارن است: اگر $a \leq b$ و $b \leq a$ آنگاه $a = b$.

[چنین رابطه‌ای را، رابطه ترتیب جزئی می‌گویند.]

۱۷. ثابت کنید برای هر $a \in \mathcal{B}$ ، $0 \leq a \leq 1$.

۲. تابع بول

متغیری که ارزشهایش فقط یا ۰ است یا ۱، متغیر دوتایی نامیده می‌شود. تابع بول، عبارتی صوری‌مشکل از متغیرهای دوتایی، عملهای دوتایی $+$ و \cdot ، عمل یکتایی، و پرانتزهاست. ما همواره جدولهای عمل در جبر بول \mathcal{B}_2 مثال ۱ را برای ارزیابی ارزش يك تابع بول به‌کار خواهیم برد. پس، هر وقت ارزشهای متغیرها داده شده باشند، ارزش تابع بول یا ۰ است یا ۱. نمادهای منطقی p, q, r, \dots که در فصل اول آمده‌اند، متغیرهای دوتایی با ارزشهای ۰ (برای دروغ) و ۱ (برای راست) هستند. هر عبارت منطقی، مانند $p \vee (q \wedge r)'$ ، يك تابع بول است که در آن $\vee, \wedge, '$ به ترتیب مجموع، حاصلضرب و منم در جبر بول مثال ۳ هستند.

جدول ارزش برای يك تابع بول جدولی است شبیه جدول ارزش يك گزاره منطقی با این تفاوت که ۰ و ۱ به‌جای F و T در آن به‌کار رفته است. يك تفاوت جزئی بین جدولهای ارزش تابعهای بول و جدولهای ارزش درمنطق است: درمنطق، جدولهای ارزش از T به‌سوی F می‌روند، درحالی‌که در تابعهای بول، جدولهای ارزش از ۰ به‌سوی ۱ می‌روند. علت اصلی اینکه «جدول ارزش پسر» را انتخاب کرده‌ایم این است که با ترتیبی که در کدگذاری دوتایی اعداد اعشاری معمول است هماهنگ باشد.

برای اختصار، از این به‌بعد برای نشان دادن حاصلضرب بولی \cdot (یا \wedge)، عملهای ضرب را پهلوی هم می‌نویسیم. هر جا قانون شرکتپذیری پیش می‌آید، پرانتزها را حذف می‌کنیم. مثلاً به‌جای $x \cdot (y \cdot z)$ یا $(x \wedge y) \wedge z$ می‌نویسیم xyz .

مثال ۴. جدولهای ارزش تابعهای بول $F = x + y'z$ ، $G = x'yz$ ، $H = xy' + x'z$ در يك جدول بزرگ، که در آن سه ستون آخر ارزشهای F ، G و H را نشان می‌دهند، گردآوری شده‌است.

جدول ۲

x	y	z	F	G	H
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۱
۰	۱	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۰	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۰	۰

تابعهای بول را اغلب می‌توان با مینیم کردن تعداد «لفظها» و تعداد جمله‌ها با استفاده از $x+x'=1$ ، $xx'=0$ و دیگر اتحادها، ساده‌تر کرد. يك لفظ يا يك متغير پریم دار (متعم متغير) است، يا يك متغير بدون پریم. در کاربردهای نظریه جبر بول در طرحهای مداري (بخشهای ۳ و ۴ را ببینید) مینیم کردن تعداد لفظها به این معنی است که در مواد و وسایل می‌توان صرفه‌جویی کرد.

مثال ۵. تابعهای بول زیر را ساده کنید:

(الف) $xy + xy' + x'y'$

(ب) $xy + xz + y'z$

(ج) $x + x'y$

حل. (الف)

تعریف ۱ (ج) $xy + xy' + x'y' = x(y + y') + x'y'$

$y + y' = 1$ $= x + x'y'$

تعریف ۱ (ج) $= (x + x')(x + y')$

$x + x' = 1$ $= x + y'$

$y + y' = 1$ $xy + xz + y'z = xy + (y + y')xz + y'z$ (ب)

تعریف ۱ (الف) و ۱ (ج) $= xy + xyz + x'y'z + y'z$

$$\begin{aligned} \text{تعریف ۱ (ج)} &= xy(1+z) + (x+1)y'z \\ \text{قضیه ۵} &= xy + y'z \end{aligned}$$

ساده کردن (ج) به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

در کاربردهای عملی، همانند طراحی مدارهای رقمی، معمولاً از جدول ارزش داده شده یک تابع بول می‌سازند. این نوع مسئله راه حلی معین دارد. برای توضیح، حالت سه متغیری x ، y و z را که جدول ارزش آن $(2^3=8)$ ردیف دارد، در نظر می‌گیریم

جدول ۳

	x	y	z	$F = F(x, y, z)$
۱ ردیف	۰	۰	۰	.
۲ ردیف	۰	۰	۱	.
۳ ردیف	۰	۱	۰	.
۴ ردیف	۰	۱	۱	.
۵ ردیف	۱	۰	۰	.
۶ ردیف	۱	۰	۱	.
۷ ردیف	۱	۱	۰	.
۸ ردیف	۱	۱	۱	.

حالت ۱. تابع بول داده شده، در ردیف z ام، $1 \leq z \leq 8$ ، دارای ارزش ۱ و در بقیه ردیفها دارای ارزش ۰ است.

برای حل این مسئله ساده تابعهای بول اساسی زیر را در نظر می‌گیریم

$$G_1: x'y'z'$$

$$G_2: x'y'z$$

$$G_3: x'yz'$$

$$G_4: x'yz$$

$$G_5: xy'z'$$

$$G_6: xy'z$$

$$G_7: xyz'$$

$$G_8: xyz$$

تابع بول ۱۰۵

به راحتی دیده می‌شود که ارزش هر G_j ، $1 \leq j \leq 8$ ، در ردیف j ام برابر با 1 و در جاهای دیگر 0 است.

حالت ۲. تابع داده شده در ردیفهای j_1, j_2, \dots, j_k ، $1 \leq j_1, \dots, j_k \leq 8$ ، دارای ارزش 1 و در بقیه جاها دارای ارزش 0 است.

در این حالت، $F = G_{j_1} + G_{j_2} + \dots + G_{j_k}$ در شرط داده شده صدق می‌کند. این مطلب مثلاً با بررسی $G_1 + G_2 = x'y'z' + x'yz'$ که دارای ارزش 1 در ردیفهای ۲ و ۳، و ارزش 0 در ردیفهای دیگر است، به آسانی دیده می‌شود.

فرایند بالا برای یافتن یک تابع بول از یک جدول ارزش داده شده تنها به سه متغیر محدود نیست. در حقیقت فرایند مذکور را می‌توان به همین نحو برای هر تعداد متناهی از متغیرها به کار برد. جواب کلی که در بالا برای حالت ۲ به دست آوردیم به صورت «مجموع حاصلضربها» است. یک راه دیگر برای حل این گونه مسائل، این است که جواب به صورت «حاصلضرب مجموعه‌ها» بیان شود. در مسئله‌های ۱۸، ۱۹ و ۲۰ زیر، به این راه اشاره شده است.

تمرین ۲۰۴

در مسئله‌های ۱ تا ۱۰، تابعهای بول داده شده را ساده کنید:

- | | | | |
|-----|---------------------------|----|-------------------|
| ۰۶ | $(x+y)(x+z)(y'+z)$ | ۰۱ | $x+x'y$ |
| ۰۷ | $x'yz+x'yz'+xy'z+x'y'z'$ | ۰۲ | $xy+x'y+x'y'$ |
| ۰۸ | $xyz'+xy'z'+x'yz'+x'y'z'$ | ۰۳ | $x'y+yz+xz$ |
| ۰۹ | $xy+xy'z$ | ۰۴ | $x(x'+y)$ |
| ۰۱۰ | $x(y'z+yz)+yz$ | ۰۵ | $xy'z'+xy'z+x'z'$ |

در مسئله‌های ۱۱ تا ۱۳، تابعهای بول داده شده را ساده کنید به طوری که لفظهای تابعهای ساده شده به تعدادی باشد که در مقابل هر مسئله تعیین شده است

- | | | |
|-------|-----|------------------------------|
| ۳ لفظ | ۰۱۱ | $xy+zw+x+(x+z'+w)'$ |
| ۴ لفظ | ۰۱۲ | $xy+yz+xz'+yzw$ |
| ۵ لفظ | ۰۱۳ | $xyz+xyz'+x'yz+x'y'z+x'y'z'$ |

۱۴. با جدول ارزش، نشان دهید که $G_4 + G_8 = x'y'z + xy'z'$ در ردیفهای ۲ و ۵ دارای ارزش 1 و در بقیه ردیفها دارای ارزش 0 است.

۱۵. نشان دهید که $G_4 + G_8 + G_7 = x'y'z + xy'z' + xyz'$ در ردیفهای ۲، ۵ و ۷ دارای ارزش 1 و در بقیه ردیفها دارای ارزش 0 است.

۱۶. يك تابع بول مثال بزئیدكه درهر ردیف دارای ارزش ۰ باشد.

۱۷. يك تابع بول مثال بزئیدكه درهر ردیف دارای ارزش ۱ باشد.

۱۸. با منمگیری از $G_1 = x'y'z'$ تا $G_8 = xyz$ داریم

$$G'_1 = x + y + z, \dots, G'_8 = x' + y' + z'$$

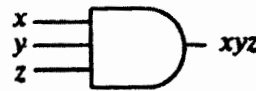
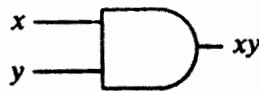
ارزشهای G'_j ، $j = 1, 2, \dots, 8$ را تعیین کنید.

۱۹. ارزشهای $G'_1, G'_2, G'_3, G'_4, G'_5, G'_6, G'_7, G'_8$ را برای ردیفهای ۱ تا ۸ پیدا کنید.

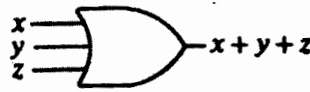
۲۰. ارزشهای تابعهای بول مسئله‌های ۱۵ و ۱۹ بالا را باهم مقایسه کنید.

۳. تابع بول و دریچه‌های منطقی

با ورودی مناسب، مدارهای رقمی الکترونیکی (یا مدارهای منطقی) به مسیرهای عملیات منطقی تبدیل می‌شوند. با توجه به اینکه هر سیگنال معرف يك متغیر دوتایی است (و هر متغیر دوتایی معرف يك سیگنال است) که حامل يك «بیت» آگاهی است، می‌توان با گذراندن سیگنالهای دو دویی از میان ترکیبهای گوناگون مدارهای منطقی، هرگونه آگاهی لازم برای محاسبه یا کنترل را روی آنها پیاده کرد. مدارهای منطقی (یا دریچه‌ها) که عملیات منطقی و (.)، یا (+)، و نه (') را انجام می‌دهند، با نمادهایشان در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. این دریچه‌ها بلوکهای سخت‌افزاری هستند که اگر شرطهای منطقی ورودی برقرار باشند، سیگنال خروجی ۱-منطقی یا ۰-منطقی ایجاد می‌کنند. دریچه نه گاهی اوقات دادنگر خوانده می‌شود زیرا سیگنال دو دویی را از ۰ به ۱ (و از ۱ به ۰) تبدیل می‌کند.



(الف) دریچهٔ و با دو و سه ورودی



(ب) دریچهٔ یا با دو و سه ورودی



(ج) وارونگر (دریچهٔ نه)

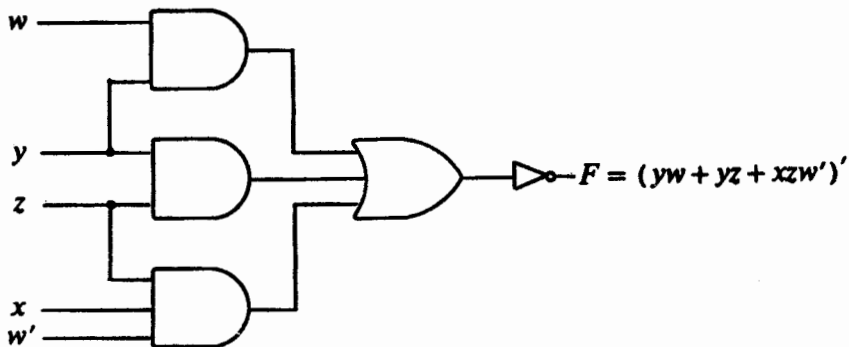
شکل ۱

۱. يك بیت، در زبان کامپیوتری، يك رقم دو دویی است.

تابع بول و دریچه‌های منطقی ۱۰۷

چون تابعهای بول برحسب $+$ (یا)، \cdot (و) و $'$ (نه) بیان می‌شوند، هر تابع بول را می‌توان با استفاده از دریچه‌های منطقی که در شکل ۱ معرفی شده‌اند، به وسیله یک نمودار مدار الکترونیکی یا مدار منطقی نشان داد (مثال ۶ را ببینید). تبدیل تابع بول به مدار منطقی را پیاده‌سازی می‌نامیم.

مثال ۶. تابع بول $F = (yw + yz + xzw')'$ را می‌توان با نمودار مدار منطقی زیر پیاده کرد.

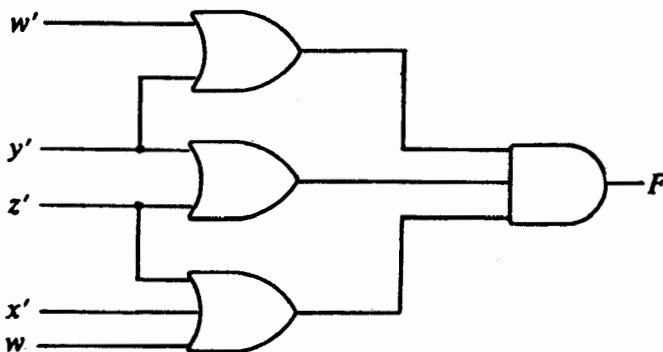


شکل ۲

مثال ۷. بنا بر قانون دموورگن، تابع بول مثال قبلی را می‌توان به صورت

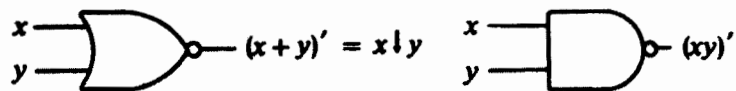
$$F = (y' + w')(y' + z')(x' + z' + w)$$

بیان کرد. پس F به صورت زیر نیز پیاده می‌شود.

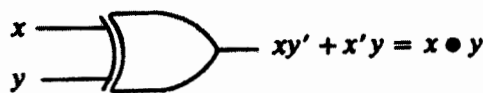


شکل ۳

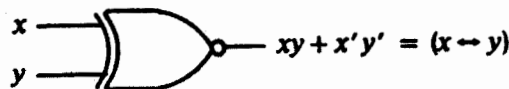
چون تابعهای بول مثال ۶ و ۷ يك جدول ارزش دارند، مدارهای منطقی شكل ۲ و ۳ برای يك هدف به كار می‌روند. اما از نظر اقتصادی و كارآیی، مدار شكل ۳ بر مدار شكل ۲ برتری دارد، زیرا در آن يك دريچه منطقی کمتر به كار می‌رود. يك راه كم كردن هزینه ابزارها و افزایش كارآیی آن است كه انواع بیشتری از دريچه‌های منطقی مفید ایجاد كنیم. دريچه‌های منطقی نه و، نه یا، یا مانع جمع، و هم‌ارزی در زیر به همین منظور ساخته شده‌اند.



(الف) دريچه نه و (ب) دريچه نه یا



(ج) دريچه یا مانع جمع



(د) دريچه هم‌ارزی

شكل ۴

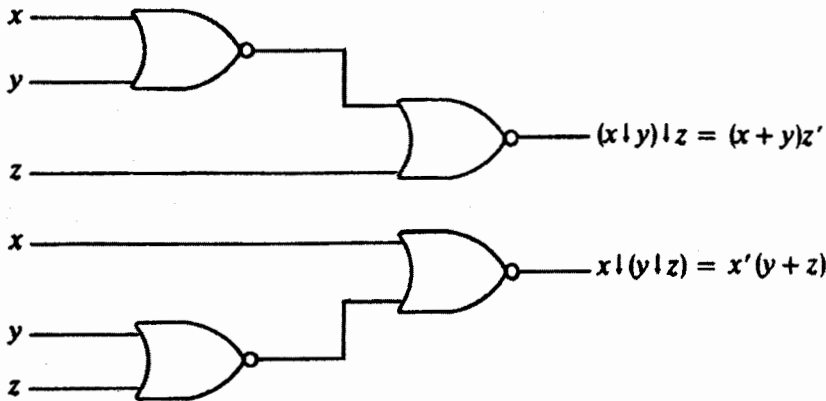
اگرچه هر چهار عمل (= دريچه) جدید جا به جایی هستند، اما باید توجه کرد كه نه و نه یا شرکته‌پذیر نیستند، در حالی كه یا مانع جمع و هم‌ارزی شرکته‌پذیرند.

مثال ۸. پیاده‌سازی $x \downarrow (y \downarrow z)$ و $(x \downarrow y) \downarrow z$ به وسیله دريچه‌های نه یا در شكل ۵ داده شده‌اند. نشان دهید كه $x \downarrow (y \downarrow z)$ و $(x \downarrow y) \downarrow z$ یکی نیستند.

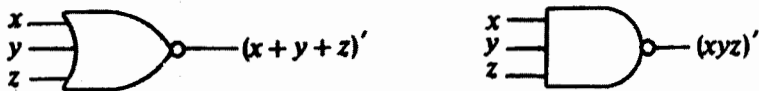
حل: برای يك مجموعه ورودیها، مثلاً $x = y = 0$ و $z = 1$ ، خروجی مدار بالایی ۰ و خروجی مدار پایینی ۱ است. بنابراین دريچه نه یا شرکته‌پذیر نیست.

برعهده خواننده است كه به عنوان تمرین نشان دهد عمل نه و نیز شرکته‌پذیر نیست. بنابراین دريچه‌های نه یا و نه و را برای ورودیهای بیشتر از دو، باید تعریف کرد.

با نمودارهای زیر این دريچه‌ها برای سه ورودی تعریف می‌شوند، و به آسانی می‌توان آن را به هر تعداد متناهی از ورودیها تعمیم داد.



شکل ۵



شکل ۶

تمرین ۳.۴

۱. جدول ارزش تابعهای زیر را بیابید:

(الف) نه و: $F = (xy)'$

(ب) نه یا: $F = x \downarrow y = (x+y)'$

(ج) یای مانع جمع: $F = x \oplus y = xy' + x'y$

(د) هم‌ارزی: $F = x \leftrightarrow y = xy + x'y'$

۲. با استفاده از دریجه‌های نه و، تابعهای $(x(yz))'$ و $((xy)'z)'$ را پیاده کنید و نشان دهید که نه و شرکتپذیر نیست.

۳. ثابت کنید که هم‌ارزی $(x \leftrightarrow y)$ شرکتپذیر است.

۴. ثابت کنید که یای مانع جمع شرکتپذیر است.

در هر يك از مسئله‌های ۵ تا ۱۲، تابعهای بول داده شده را با استفاده از دریجه‌های منطقی پیاده کنید.

۵. $(x+y'+z')(y+z'+w')(x'+y'+z')(x'+y+z)$

۶. $(xy'+x'y)(zw+z'w')$

$$x+z+yz+y'w' \quad .۷$$

$$x+zw+z'w' \quad .۸$$

$$x+y'z+yz'w+zw'+y'w' \quad .۹$$

$$x'zw'+y'z'w' \quad .۱۰$$

$$x+y'w'+yz'+z'w' \quad .۱۱$$

$$x+yz'+yw'+y'z+zw' \quad .۱۲$$

۴. کاربرد در مدارهای کامپیوتر رقمی

کامپیوترهای رقمی، علاوه بر کارهای دیگر، تمام انواع عملهای حساب را انجام می‌دهند. اساسی‌ترین عمل حساب، جمع دو رقم دوتایی است که از $۰+۰=۰$ ، $۰+۱=۱$ ، $۱+۰=۱$ و $۱+۱=۱۰$ تشکیل یافته است. مجموع هر یک از سه عمل اول، عددی یک رقمی است، درحالی‌که مجموع عمل چهارم دو رقمی است. بیت مرتبه بالاتر این مجموع رقم نقلی نامیده می‌شود. در جمع دو عدد چند رقمی، رقم نقلی باید به رقم مرتبه بالاتر بعدی اضافه شود. مدار رقمی که عملش جمع کردن دو بیت است نیم‌فزونگر نامیده می‌شود، و مداری که عملش جمع کردن سه بیت است (دو بیت و رقم نقلی قبلی)، تمام‌فزونگر نام دارد.

بدیهی است که نیم‌فزونگر نیاز به دو ورودی دودویی (که با x و y نشان داده می‌شوند) و دو خروجی دودویی که با S (برای جمع) و C (برای رقم نقلی) نشان داده می‌شوند، نیاز دارد. جدول ارزشی که عمل نیم‌فزونگر را مشخص می‌کند می‌توان به صورت زیر نشان داد.

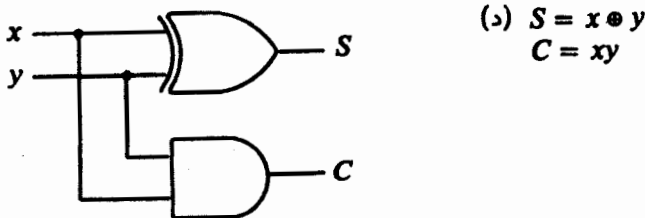
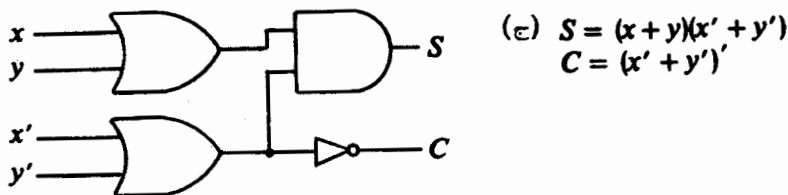
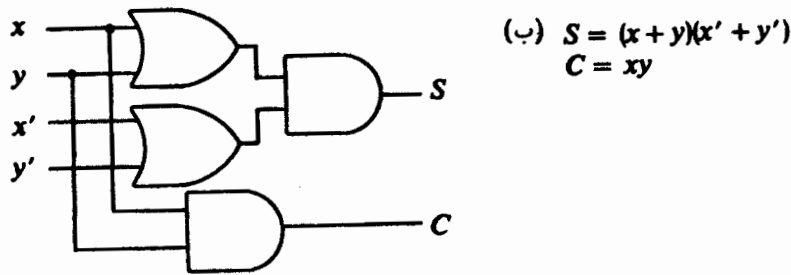
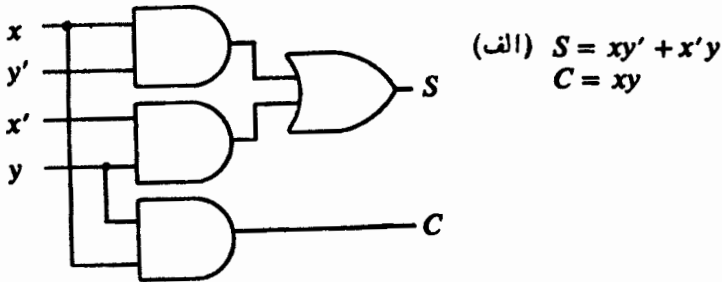
جدول ۴

x	y	C	S
۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۱
۱	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۰

مثلاً، ردیف چهارم جدول ارزش به معنای $۱+۱=۱۰$ است. به راحتی می‌توان توابع بول جدول ۴ را به دست آورد

$$S=x'y+xy', \quad C=xy$$

شکل ۷ راه‌های گوناگون پیاده‌سازی دوتابع بول S و C را نشان می‌دهد. پیاده‌سازی نیم-فزونگر در شکل ۷ نشان می‌دهد که حتی برای عمل ساده‌ای نظیر نیم-فزونگر طرح‌های مختلفی وجود دارد. این مسئله‌ای برای طراح کامپیوتر است که طرحی بریزد که کمترین تعداد مدار را داشته باشد. در یک تمام-فزونگر، دو متغیر از متغیرهای ورودی (که با x و y مشخص می‌شوند)



شکل ۷

دو بیتی را که باید باهم جمع شوند، نشان می‌دهد. متغیر سوم (که با z مشخص می‌شود) رقم نقلی مرتبه پایینتر قبلی را نشان می‌دهد. دوخروجی، همانند حالت نیم-فزونگر، که با S و C نشان داده می‌شود به ترتیب جمع و رقم نقلی هستند. اکنون می‌توانیم جدول ارزش تمام-فزونگر را بنویسیم.

جدول ۵

x	y	z	C	S
۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۱	۱	۱

از جدول ارزش بالا، تابعهای بول برای تمام-فزونگر مستقیماً به صورت زیر به دست می‌آیند (رجوع کنید به مسئله ۲۵، تمرین ۳۰۱):

$$S = xyz + xy'z' + x'yz' + x'y'z$$

$$C = xyz + xyz' + xy'z + x'yz$$

خلاصه کردن لفظها در S و C به صورتهای

$$S = (x \oplus y) \oplus z, \quad C = xy + xz + yz$$

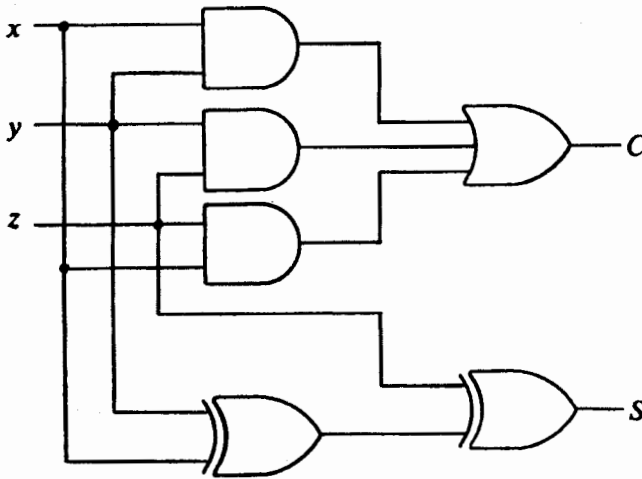
به‌عهد خواننده است. این دو تابع مستقیماً در شکل ۸ پیاده شده‌اند. شش دریچه منطقی در این پیاده‌سازی به‌کار رفته‌اند.

بار دیگر این طراح است که باید تعداد دریچه‌های منطقی را با حفظ کارآیی آن کاهش دهد. طراح خوب می‌تواند C را به صورت زیر بنویسد:

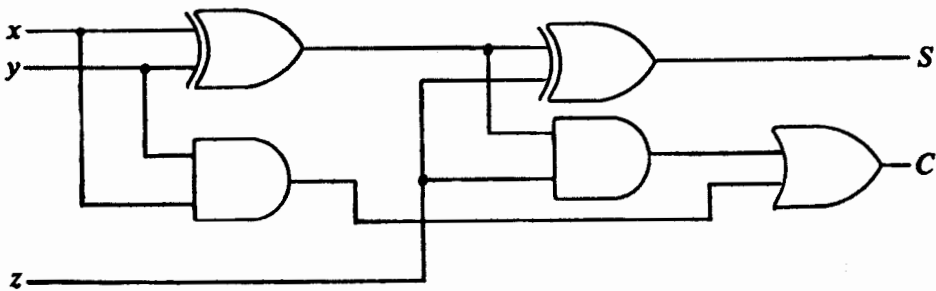
$$C = xy + (xy' + x'y)z$$

این عبارت همراه با $S = (x \oplus y) \oplus z$ مدار نمودار شکل ۹ را به دست می‌دهد.

کاربرد در مدارهای کامپیوتر رقمی ۱۱۳



شکل ۸



شکل ۹

توجه کنید که تمام-فزونگر شکل ۹، ترکیب دو نیم-فزونگر شکل ۷ (د) با یک درجهٔ یا است. بدین جهت، می‌توان یک تمام-فزونگر را به‌عنوان دو نیم-فزونگر در نظر گرفت.

تمرین ۴.۴

۱. ثابت کنید تا به‌های بول شکل ۷ هم‌ارزند، یعنی جدول ارزش آنها یکی است.

$$S = xy' + x'y \quad (\text{الف})$$

$$S = (x+y)(x'+y') \quad (\text{ب})$$

$$S = x \oplus y \quad (\text{ج})$$

۲. نشان دهید که $C = xy$ در شکل ۷ (الف) و $C = (x' + y)'$ در شکل ۷ (ج) دارای یک جدول ارزش هستند.

۳. نشان دهید که در یک تمام-فزونگر داریم،

$$S = xyz + xy'z' + x'yz' + x'y'z = (x \oplus y) \oplus z$$

۴. نشان دهید که

$$\begin{aligned} C &= xyz + xyz' + xy'z + x'y'z \\ &= xy + xz + yz \\ &= xy + (xy' + x'y)z \end{aligned}$$

۵. عمل نیم-تفاضلگر در جدول ارزش زیر

x	y	B	D
۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱
۱	۱	۰	۰

داده شده است، که در آن D تفاضل، $y - x$ ، را نشان می‌دهد و B رقم قرصی از بیت مرتبه بالاتر بعدی را مشخص می‌کند.

(الف) یک دسته تابع بول برای B و D بیابید.

(ب) در صورت امکان، تابعهای بولی را که در (الف) پیدا کرده‌اید، ساده کنید.

۶. در مسئله ۵ بالا، نمودار مدارهای (الف) و (ب) را رسم کنید.

۷. عمل تمام-تفاضلگر با جدول ارزش زیر داده شده است:

x	y	z	B	D
۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱

کاربرد در مدارهای کامپیوتر رقمی ۱۱۵

که در آن x, y, B, D همانهایی هستند که در نیم-تفاضلگر آمده‌اند، و z رقم فرضی قبلی است.

(الف) یک دسته تابع بول برای B و D بیابید.

(ب) تابعهای بول را که در (الف) به دست آورده‌اید، ساده کنید.

۸. نمودارهای مداری γ (الف) و γ (ب) را رسم کنید.

۹. تمام-تفاضلگری را طراحی کنید که دو نیم-تفاضلگر را با یک درجه یا ترکیب می‌کند.



مجموعه‌های شمارای نامتناهی و ناشمارا

برای بحث در خواص مجموعه‌های نامتناهی و متناهی از تعریف ددکیند در مورد مجموعه‌های نامتناهی استفاده شده است. یکی از مطالب اثبات شده این است که مجموعه‌های شمارای نامتناهی در بین مجموعه‌های نامتناهی از نظر «اندازه» کوچکترین هستند. ویژگیها و مثالهایی از مجموعه‌های شمارای نامتناهی و مجموعه‌های ناشمارا آورده شده است.

۱. مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

در بخش ۱، فصل ۲، به مناسبتی اشاره کردیم که مجموعه متناهی مجموعه‌ای است که فقط شامل تعدادی متناهی عنصر باشد؛ اما این مفهوم را می‌توان با یک تعریف دقیقتر ریاضی بیان کرده ما تعریفی را (تعریف ۱) که ددکیند ابداع کرده است ترجیح می‌دهیم. در بخش ۱، فصل ۲، تأکید شد که N ، مجموعه تمام اعداد طبیعی، یک مجموعه نامتناهی است. گیریم $N_0 = \{2, 4, 6, \dots\}$ مجموعه تمام اعداد طبیعی زوج است. همان گونه که خواننده در مسئله ۸، تمرین ۶.۳، نشان داده است، یک تناظر یک به یک بین مجموعه N و زیرمجموعه سره آن، N_0 وجود دارد.

به عبارت دیگر،

يك جزء به بزرگی كل است.^۱

این ویژگی عجیب مجموعه نامتناهی بسیاری از ریاضیدانان، از جمله گئورگ کانتور را نگران ساخت. ریچارد دکیند^۲ (۱۸۳۱-۱۹۱۶) این ویژگی را برای تعریف مجموعه نامتناهی به کار برد. تعریف زیر را دکیند در ۱۸۸۸ عرضه کرد.

تعریف ۰۱. مجموعه X نامتناهی است اگر زیرمجموعه‌ای سره مانند Y داشته باشد به طوری که يك تناظر يك به يك بين X و Y وجود داشته باشد. مجموعه متناهی است اگر نامتناهی نباشد.

به عبارت دیگر، مجموعه X نامتناهی است اگر و تنها اگر يك تابع يك به يك $f: X \rightarrow X$ وجود داشته باشد به قسمی که $f(X)$ يك زیرمجموعه سره X باشد. از این رو، مجموعه اعداد طبیعی \mathbb{N} يك مجموعه نامتناهی است.

مثال ۰۱. مجموعه تهی \emptyset و مجموعه‌های تك عنصری^۳ متناهی هستند.

حل. (الف) چون مجموعه تهی زیرمجموعه سره ندارد، نمی‌تواند نامتناهی باشد. لذا، مجموعه تهی متناهی است. (ب) مجموعه تك عنصری دلخواه $\{a\}$ را در نظر می‌گیریم. چون تنها زیرمجموعه سره $\{a\}$ مجموعه تهی است و هیچ تناظر يك به يکی بين $\{a\}$ و \emptyset نیست، $\{a\}$ متناهی است.

قضیه ۰۱

(الف) هر ابرمجموعه يك مجموعه نامتناهی، نامتناهی است.
(ب) هر زیرمجموعه يك مجموعه متناهی، متناهی است.

۱. يك اختلاف آشکار با اصل موضوع اقلیدس (Euclid's Axiom): «كل بزرگتر از هر جزء خودش است» (۳۲۵ سال قبل از میلاد).

۲. ریچارد دکیند (Richard Dedekind) یکی از بزرگترین ریاضیدانان، در ۶ اکتبر ۱۸۳۱، در پروشویک آلمان به دنیا آمد. در اول به فیزیک و شیمی علاقه داشت؛ ریاضیات را فقط خادم علوم تصور می‌کرد. اما عمر این طرز تفکر کوتاه بود؛ در سن ۱۷ سالگی از فیزیک و شیمی به ریاضیات، که منطقش را رضایتبخش یافت، روی آورد. در سن نوزده سالگی برای مطالعه ریاضیات وارد دانشگاه گوتینگن شد، و سه سال بعد به دریافت درجه دکتری زیر نظر گاوس نایل شد. از جمله کارهای اساسی او در ریاضیات «برش دکیند» مشهور است، که در مطالعه اعداد اصم مفهومی مهم است، و خواننده در درس آنالیز حقیقی احتمالاً فرصت مطالعه آن را خواهد داشت.

۳. يك مجموعه تك عنصری مجموعه‌ای است که فقط از يك عنصر تشکیل شده است.

پرهان. (الف) مجموعه X را نامتناهی و Y را يك ابرمجموعه X می‌گیریم، یعنی $X \subseteq Y$. آنگاه بنا بر تعریف ۱ يك تابع يك به يك $f: X \rightarrow X$ وجود دارد به طوری که $f(X) \neq X$. تابع $g: Y \rightarrow Y$ را با

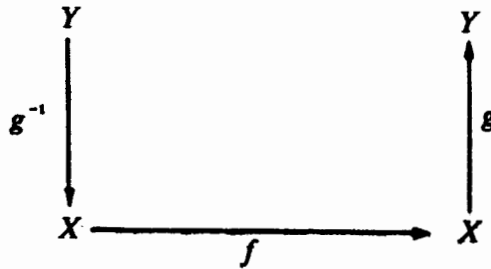
$$g(y) = \begin{cases} f(y) & \text{اگر } y \in X \\ y & \text{اگر } y \in Y - X \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. بررسی يك به يك بودن تابع $g: Y \rightarrow Y$ و نیز اینکه $g(Y) \neq Y$ را به خواننده واگذار می‌کنیم. اکنون از تعریف ۱ نتیجه می‌شود که Y نامتناهی است.

(ب) مجموعه Y را متناهی و X را يك زیرمجموعه Y می‌گیریم؛ یعنی $X \subseteq Y$. برای اینکه نشان دهیم X متناهی است، خلاف آن را فرض می‌کنیم؛ یعنی فرض می‌کنیم X نامتناهی است. اما در این صورت بنا بر (الف)، مجموعه Y باید نامتناهی باشد. این يك تناقض است. بنابراین مجموعه X متناهی است.

قضیه ۲. گیریم $g: X \rightarrow Y$ يك تناظر يك به يك است. اگر مجموعه X نامتناهی باشد، Y نیز نامتناهی است.

پرهان. چون X نامتناهی است، بنا بر تعریف ۱ يك تابع يك به يك $f: X \rightarrow X$ وجود دارد به طوری که $f(X) \neq X$. چون $g: X \rightarrow Y$ يك تناظر يك به يك است، $g^{-1}: Y \rightarrow X$ نیز يك تناظر يك به يك است (قضیه ۱۴، فصل ۳). اکنون به نمودار توابع يك به يك زیر توجه می‌کنیم:



در نتیجه، $h = g \circ f \circ g^{-1}: Y \rightarrow Y$ که ترکیبی از توابع يك به يك است، يك تابع يك به يك است [مسئله ۷، تمرین ۷.۳]. بالاخره داریم

$$\begin{aligned} h(Y) &= (g \circ f \circ g^{-1})(Y) = (g \circ f)(g^{-1}(Y)) \\ &= (g \circ f)(X) = g(f(X)) \end{aligned}$$

و $g(f(X)) \neq Y$ ، زیرا $f(X) \neq X$.

پس، $h(Y)$ يك زیرمجموعه سرتة Y است و از این رو Y نامتناهی است.

نتیجه. گیریم $g: X \rightarrow Y$ يك تناظر يك به يك است. اگر مجموعه X منتهای باشد، Y نیز منتهای است.

پرهان. به عهده خواننده واگذار می‌شود.

قضیه ۳. مجموعه نامتناهی X و $x_0 \in X$ مفروض‌اند. آنگاه $X - \{x_0\}$ نیز نامتناهی است.

پرهان. بنا بر تعریف ۱، يك تابع يك به يك $f: X \rightarrow X$ وجود دارد به طوری که $f(X) \subset X$. باید دو حالت در نظر بگیریم، (۱)، $x_0 \in f(X)$ ، یا (۲)، $x_0 \in X - f(X)$. در هر حالت باید تابعی يك به يك مانند $g: X - \{x_0\} \rightarrow X - \{x_0\}$ بسازیم به طوری که $g(X - \{x_0\}) \neq X - \{x_0\}$.

حالت ۱. $x_0 \in f(X)$

يك عنصر x_1 در X وجود دارد به طوری که $f(x_1) = x_0$. اکنون تابع

$$g: X - \{x_0\} \rightarrow X - \{x_0\}$$

را با

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \neq x_1 \\ x_1 & \text{اگر } x = x_1 \in X - \{x_0\} \end{cases}$$

که در آن x_1 يك عنصر ثابت اختیاری مجموعه ناتهی $X - f(X)$ است، تعریف می‌کنیم. نتیجه می‌شود که $g: X - \{x_0\} \rightarrow X - \{x_0\}$ يك به يك است و

$$g(X - \{x_0\}) = f(X - \{x_0, x_1\}) \cup \{x_1\} \neq X - \{x_0\}$$

از این رو $X - \{x_0\}$ در این حالت نامتناهی است.

حالت ۲. $x_0 \in X - f(X)$

يك تابع $g: X - \{x_0\} \rightarrow X - \{x_0\}$ با $g(x) = f(x)$ برای هر $x \in X - \{x_0\}$ تعریف می‌کنیم. چون $f: X \rightarrow X$ يك به يك است، $g: X - \{x_0\} \rightarrow X - \{x_0\}$ نیز يك به يك است. بالاخره،

$$g(X - \{x_0\}) = f(X) - \{f(x_0)\} \neq X - \{x_0\}$$

پس، در هر حالت، $X - \{x_0\}$ نامتناهی است.

از این به بعد، مجموعه تمام اعداد طبیعی از ۱ تا $k \in \mathbb{N}$ را با \mathbb{N}_k نمایش می‌دهیم؛ یعنی $\mathbb{N}_k = \{1, 2, \dots, k\}$. به عنوان يك کاربرد قضیه ۳، در مثال زیر نشان می‌دهیم که هر \mathbb{N}_k يك مجموعه منتهای است.

مثال ۲. برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، مجموعه \mathbb{N}_k متناهی است.

برهان. این حکم را با اصل استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم. بنا بر مثال ۱، برای $k=1$ حکم راست است. حال فرض کنید که برای عدد طبیعی k ، مجموعه \mathbb{N}_k متناهی است. مجموعه $\mathbb{N}_{k+1} = \mathbb{N}_k \cup \{k+1\}$ را در نظر بگیرید. اگر \mathbb{N}_{k+1} نامتناهی باشد، آنگاه بنا بر قضیه ۳، $\mathbb{N}_{k+1} - \{k+1\} = \mathbb{N}_k$ نیز يك مجموعه نامتناهی است، که فرض استقرا را نقض می‌کند. بنابراین اگر \mathbb{N}_k متناهی باشد، \mathbb{N}_{k+1} نیز متناهی است. پس، بنا بر اصل استقرای ریاضی، مجموعه \mathbb{N}_k برای هر $k \in \mathbb{N}$ متناهی است. در واقع، رابطه نزدیکی بین يك مجموعه متناهی نتهی و يك مجموعه \mathbb{N}_k وجود دارد.

قضیه ۴. مجموعه X متناهی است اگر و تنها اگر $X = \emptyset$ یا X با يك \mathbb{N}_k در تناظر يك به يك باشد.

برهان. اگر X یا تهی باشد یا با يك \mathbb{N}_k در تناظر يك به يك باشد؛ آنگاه بنا بر نتیجه قضیه ۲ و مثالهای ۱ و ۲، مجموعه X متناهی است.

برای اثبات عکس آن، عکس نقیض آن را (که با آن هم‌ارز است)، ثابت می‌کنیم: اگر $X \neq \emptyset$ و X با هیچ يك از \mathbb{N}_k ها در تناظر يك به يك نباشد، آنگاه X نامتناهی است. اکنون از يك عنصر x_1 انتخاب می‌کنیم، $\{x_1\} - X$ تهی نیست؛ زیرا در غیر این صورت $X = \{x_1\}$ و در تناظر يك به يك با \mathbb{N}_1 می‌شود که با فرض تناقض دارد. برای $\{x_1\} - X$ عملی مشابه انجام می‌دهیم، یعنی يك عنصر آن مانند x_2 را انتخاب می‌کنیم. با ادامه این روش، فرض کنید که عناصر x_1, x_2, \dots, x_k را از X انتخاب کرده‌ایم. آنگاه $X - \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ تهی نیست؛ زیرا در غیر این صورت $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ در تناظر يك به يك با \mathbb{N}_k می‌شود، که با فرض مربوط به X در تناقض است. بنابراین همیشه می‌توانیم يك عنصر x_{k+1} از $X - \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ انتخاب کنیم. آنگاه بنا بر استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی n ، يك زیرمجموعه سره X مانند $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ وجود دارد. مجموعه x_n های منتخب برای هر عدد طبیعی n را با $Y - \{x_1\}$ نشان می‌دهیم. آنگاه تابع $f: Y - \{x_1\} \rightarrow Y - \{x_1\}$ که با $f(x_k) = x_{k+1}$ تعریف می‌شود، بین Y و $Y - \{x_1\}$ ، زیرمجموعه سره Y ، يك تناظر يك به يك برقرار می‌کند. لذا، بنا بر تعریف ۱، Y نامتناهی است و، بنا بر قضیه ۱، X نامتناهی است.

۱. در اینجا نویسندگان به‌طور ضمنی از «اصل انتخاب» که اصلی مهم است و در فصل ۶ به بحث آن خواهیم پرداخت، استفاده کرده‌اند. صورتی از اصل انتخاب را در اینجا می‌آوریم: «فرض می‌کنیم \mathcal{P} يك مجموعه غیر تهی از زیرمجموعه‌های غیر تهی يك مجموعه مفروض X است. آنگاه يك مجموعه $R \subseteq X$ وجود دارد به قسمی که برای هر $C \in \mathcal{P}$ ، $C \cap R$ ، C مجموعه تسك عضوی است». این اصل در سراسر کتاب بدون اینکه صریحاً ذکر شود، به کار خواهد رفت.

توجه خواننده را به این نکته جلب می‌کنیم که با توجه به قضیه ۴ می‌توانیم تعریف دیگری برای مجموعه‌های متناهی و نامتناهی بیاوریم. می‌توانیم بگوییم که مجموعه متناهی است اگر و تنها اگر یا تهی باشد یا با یک N_k در تناظر یک به یک باشد، و نامتناهی است اگر و تنها اگر متناهی نباشد. با این تعریف جدید، تعریف ۱ به عنوان یک قضیه ثابت می‌شود. به هر حال، استفاده از این تعریف ساده‌تر نیست و به اندازه تعریف اول کار می‌برد.

تمرین ۱۰۵

۱. برهان قضیه ۱ را کامل کنید.
۲. گیریم $g: X \rightarrow Y$ یک تناظر یک به یک است. ثابت کنید که اگر X متناهی باشد، آنگاه Y متناهی است.
۳. ثابت کنید که مجموعه‌های Z ، Q ، و R نامتناهی هستند.
۴. ثابت کنید که اگر A یک مجموعه نامتناهی باشد، آنگاه $A \times A$ نیز نامتناهی است.
۵. ثابت کنید که اگر مجموعه‌های A و B نامتناهی باشند، آنگاه $A \cup B$ یک مجموعه نامتناهی است.
۶. ثابت کنید که اجتماعی متناهی از مجموعه‌های متناهی، متناهی است.
۷. فرض کنید $A \cup B$ ، اجتماع دو مجموعه A و B ، نامتناهی است. ثابت کنید که حداقل یکی از دو مجموعه A و B نامتناهی است.
۸. تعمیم زیر از قضیه ۳ را ثابت کنید: اگر Y یک زیرمجموعه متناهی از مجموعه نامتناهی X باشد، آنگاه $X - Y$ نامتناهی است.
۹. ثابت کنید که اگر مجموعه A به قسمی باشد که هر ابرمجموعه سره A نامتناهی باشد، آنگاه A نامتناهی است.
۱۰. ثابت کنید که اگر یک مجموعه B به قسمی باشد که هر زیرمجموعه سره B متناهی باشد، آنگاه B متناهی است.
۱۱. ثابت کنید که اگر $k \in \mathbb{N}$ ، و مجموعه‌های A_1, A_2, \dots, A_k به قسمی باشند که $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ نامتناهی باشد، آنگاه برای یک $z \in \mathbb{N}$ ، A_z نامتناهی است.
۱۲. ثابت کنید که اگر مجموعه A به قسمی باشد که $A \times A$ نامتناهی باشد، آنگاه A نامتناهی است.
۱۳. ثابت کنید که اگر مجموعه‌های A و B به قسمی باشند که $A \times B$ نامتناهی باشد، آنگاه یا A نامتناهی است یا B .
۱۴. ثابت کنید که اگر $k \in \mathbb{N}$ ، و مجموعه‌های A_1, A_2, \dots, A_k به قسمی باشند که $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ نامتناهی باشد، آنگاه برای یک $z \in \mathbb{N}$ ، A_z نامتناهی است.
۱۵. ثابت کنید که اگر مجموعه‌های A و B به قسمی باشند که $A \oplus B$ نامتناهی باشد، آنگاه یا A نامتناهی است یا B .
۱۶. نشان دهید که مجموعه $\{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ نامتناهی است.
۱۷. ثابت کنید که مجموعه توانی یک مجموعه متناهی، متناهی است.

۲. همتوانی مجموعه‌ها

تعداد عنصرهای دو مجموعه متناهی X و Y برابر است اگر و تنها اگر يك تناظر يك به يك $f: X \rightarrow Y$ بين X و Y وجود داشته باشد. هر چند که عبارت «تساوی تعداد عنصرها» را برای حالتی که مجموعه‌های X و Y نامتناهی هستند، به کار نمی‌بریم، به نظر می‌رسد طبیعی باشد فکر کنیم دو مجموعه (نامتناهی) که در تناظر يك به يك هستند، دارای يك اندازه هستند. ما این ادراک را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

تعریف ۲. دو مجموعه X و Y را همتوان می‌گویند و نماد $X \sim Y$ را برای آن به کار می‌برند، هر گاه بين X و Y يك تناظر يك به يك $f: X \rightarrow Y$ وجود داشته باشد. بدیهی است که هر مجموعه همتوان خودش است. چون وارون تناظر يك به يك نیز يك تناظر يك به يك است (قضیه ۱۴، فصل ۳)، $X \sim Y$ اگر و تنها اگر $Y \sim X$ قرار می‌گذاریم که نماد $X \sim Y$ معنی است که $f: X \rightarrow Y$ يك تناظر يك به يك است و در نتیجه $Y \sim X$. با این نماد قراردادی، قسمت اول حکم مسئله ۱۲ تمرین ۷.۳ را می‌توان چنین بیان کرد: اگر $f: X \sim Y$ و $g: Y \sim Z$ ، آنگاه $g \circ f: X \sim Z$. به این ترتیب قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۵. گیریم φ يك مجموعه مجموعه‌ها است و \mathcal{R} رابطه‌ای روی φ است که با « $X \mathcal{R} Y$ » اگر و تنها اگر X و Y عضوهای φ باشند و « $X \sim Y$ »، تعریف شده است. آنگاه \mathcal{R} يك رابطه هم‌ارزی روی φ است.

در مثال زیر، نمادهای $(0, 1)$ و $(-1, 1)$ فاصله‌های باز اعداد حقیقی هستند، نه جفت‌های مرتبی از اعداد صحیح.

مثال ۳.

$$(الف) (-1, 1) \sim (0, 1)$$

$$(ب) (-1, 1) \sim \mathbf{R} \text{ و } (0, 1) \sim \mathbf{R}$$

حل: (الف) تابع $f: (0, 1) \rightarrow (-1, 1)$ که با $f(x) = 2x - 1$ داده شده است، يك تناظر يك به يك است. از این رو $(-1, 1) \sim (0, 1)$.

(ب) تابع مثلثاتی $g: (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ که با $g(x) = \tan(\pi x/2)$ داده شده است، يك تناظر يك به يك است؛ پس $(-1, 1) \sim \mathbf{R}$. لازم است خواننده این مطلب را با رسم نمودار $g(x) = \tan(\pi x/2)$ بررسی کند. با تحقیق در درستی دو نکته زیر برهانی دقیق به دست می‌آید:

$$(۱) \quad g: (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R} \text{ پیوسته، و از طرف بالا و پایین بی‌کران است.}$$

(۲) از $\forall x \in \mathbf{R}, g'(x) = (\pi/2) \sec^2(\pi x/2) > 0$ نتیجه می‌شود که g اکیداً صعودی است.

چون «رابطه» همتوانی \sim ، متعدی است، از $(-1, 1) \sim (0, 1)$ و $(-1, 1) \sim \mathbf{R}$ نتیجه می‌شود $(0, 1) \sim \mathbf{R}$.

قضیه ۶. مجموعه‌های X, Y, Z ، و W با شرط $X \cap Z = \emptyset = Y \cap W$ و $f: X \sim Y$ و $g: Z \sim W$ مفروض‌اند. آنگاه $f \cup g: (X \cup Z) \sim (Y \cup W)$.

پرهان. چون $f: X \rightarrow Y$ و $g: Z \rightarrow W$ توابعی با شرط $X \cap Z = \emptyset$ هستند، بنا بر قضیه ۸ فصل ۳، $f \cup g: X \cup Z \rightarrow Y \cup W$ یک تابع است. بر خواننده است که ثابت کند تابع اخیر یک تناظر یک به یک است.

قضیه ۷. گیریم X, Y, Z ، و W مجموعه‌هایی با شرط $X \sim Y$ و $Z \sim W$ هستند، آنگاه $X \times Z \sim Y \times W$.

پرهان. گیریم $f: X \sim Y$ و $g: Z \sim W$. تابع $f \times g: X \times Z \rightarrow Y \times W$ برای هر $(x, z) \in X \times Z$ با $(f(x), g(z))$ تعریف می‌کنیم. از خواننده می‌خواهیم تحقیق کند که تابع اخیر یک تناظر یک به یک است.

اگر مجموعه‌های منتهای $N_k = \{1, 2, \dots, k\}$ را هنگامی که k بزرگ می‌شود در نظر بگیریم و توجه کنیم که مجموعه‌های نامتناهی $\mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}$ ، و \mathbf{R} فوق مجموعه‌های N هستند (مسئله ۳، تمرین ۱۰۵ را ببینید)، روشن می‌شود که «کوچکترین» مجموعه نامتناهی، مجموعه اعداد طبیعی \mathbf{N} ، یا هر مجموعه همتوان با \mathbf{N} ، است. به زودی در بخش ۴، خواهیم دید که همه مجموعه‌های نامتناهی با \mathbf{N} همتوان نیستند.

تعریف ۳. مجموعه X شماردای نامتناهی گفته می‌شود هر گاه $X \sim \mathbf{N}$. مجموعه شماردای نامتناهی است که یا منتهای باشد یا شماردای نامتناهی.

گیریم X یک مجموعه شماردای نامتناهی است. آنگاه یک تناظر یک به یک $f: \mathbf{N} \sim X$ وجود دارد. اگر بنویسیم

$$f(1) = x_1, f(2) = x_2, f(3) = x_3, \dots, f(k) = x_k, \dots$$

آنگاه X را می‌توان با نماد $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots\}$ نیز نشان داد. منظور از نقاط بین x_3 و x_2 و بعد از x_k این است که نشان دهند عناصر به ترتیب شماره‌های اندیس مرتب شده‌اند. اکنون بجاست توضیحی درباره اصطلاح «شمارا» داده شود. برای یک مجموعه منتهای، از نظر تئوری شمردن عناصر مجموعه امکان دارد و بنابراین اصطلاح مناسب است. اگر چه واقعاً شمردن تمام عناصرهای یک مجموعه شماردای $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ امکان

۱. اگر دقت رعایت شود « \sim » رابطه نیست، زیرا حوزه تعریف آن یک مجموعه نیست (به قضیه ۱۵ فصل ۲ نگاه کنید). اما می‌توانیم آن را یک رابطه بناهیم اگر فرض کنیم \sim روی یک مجموعه مفروض ϕ از مجموعه‌ها تعریف شده است (قضیه ۵).

ندارد، اما به‌رحال X در يك تناظر يك به‌يك با اعداد طبیعی یا اعداد شمارش* است.
 قضیه ۰۸. هر زیرمجموعه نامتناهی از يك مجموعه شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

برهان. گیریم Y يك زیرمجموعه نامتناهی از مجموعه شمارای نامتناهی n_1 و $x_{n_1} \in Y$ کوچکترین اندیسی باشد که $x_{n_1} \in Y - \{x_{n_1}\}$ فرض کنیم n_2 کوچکترین اندیسی باشد که $x_{n_2} \in Y - \{x_{n_1}, x_{n_2}\}$ فرض کنید $x_{n_2} \in Y - \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}\}$ را کوچکترین اندیسی می‌گیریم که $x_{n_k} \in Y - \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}\}$ چون Y نامتناهی است، برای هر $k \in \mathbb{N}$ $Y - \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}\} \neq \emptyset$ ، پس همیشه برای هر $k \in \mathbb{N}$ x_{n_k} وجود دارد. به این ترتیب يك تناظر يك به يك $f: \mathbb{N} \sim Y$ به صورت $f(k) = x_{n_k}$ برای هر $k \in \mathbb{N}$ درست کرده‌ایم. بنا بر این، شمارای نامتناهی است.

برهان کوتاه‌تر دیگری که کمتر شهودی است، در مسئله ۱۰ در آخر همین بخش برای قضیه ۸ عنوان شده است. نتیجه زیر به آسانی از تعریف ۳ و قضیه ۸ به‌دست می‌آید.

نتیجه. هر زیرمجموعه يك مجموعه شمارا، شماراست.

در بخش بعدی چند مثال و چند ویژگی مجموعه‌های شمارای نامتناهی آورده شده است.

تمرین ۲۰۵

۱. برهان قضیه ۶ را کامل کنید.
۲. برهان قضیه ۷ را کامل کنید.
۳. ثابت کنید که اگر X و Y دو مجموعه باشند، آنگاه $X \times Y \sim Y \times X$.
۴. ثابت کنید که اگر $(X - Y) \sim (Y - X)$ ، آنگاه $X \sim Y$.
۵. این تعمیم قضیه ۶ را ثابت کنید: گیریم $\{X_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ و $\{Y_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ دو خانواده مجموعه‌های مجزاهستند و برای هر $\gamma \in \Gamma$ ، $X_\gamma \sim Y_\gamma$. آنگاه $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \sim \bigcup_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma$.
۶. ثابت کنید که اگر X يك مجموعه شمارای نامتناهی، و Y يك زیرمجموعه متناهی X باشد، آنگاه $X - Y$ شمارای نامتناهی است. [با مسئله ۸، تمرین ۱۰۵ مقایسه کنید].
۷. ثابت کنید که اگر X يك مجموعه شمارای نامتناهی و Y يك مجموعه متناهی باشد، آنگاه $X \cup Y$ شمارای نامتناهی است.
۸. ثابت کنید که مجموعه تمام اعداد طبیعی زوج \mathbb{N}_e و مجموعه تمام اعداد طبیعی فرد \mathbb{N}_o شمارای نامتناهی هستند.**

* چون اشیاء را با اعداد طبیعی می‌شماریم، مؤلف برای توجیه بیشتر اصطلاح «شمارا» اعداد طبیعی را، اعداد شمارش نیز گفته است. -م.

** حرف اول even به معنای زوج و حرف اول odd به معنای فرد است. -م.

چند مثال و ویژگی مجموعه‌های شمارای نامتناهی ۱۲۵

۹. گیریم A يك مجموعه غير تهی، و $\mathcal{P}(A)$ مجموعه تمام توابع از مجموعه A به مجموعه $\{0, 1\}$ است. ثابت کنید که $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(A)$.

۱۰. گیریم X يك مجموعه شمارای نامتناهی و Y يك زیر مجموعه نامتناهی X باشد. فرض کنیم که $g: X \sim \mathbb{N}$ و گیریم $h: Y \rightarrow \mathbb{N}$ با

$$h(y) = \{1, 2, 3, \dots, g(y)\} \cap g(Y)$$

تعریف شده است. ثابت کنید که h يك تناظر يك به يك است و بنابراین Y شمارای نامتناهی است.

۱۱. گیریم $a < b$ ، $[a, b]$ يك فاصله بسته است. ثابت کنید که تابع $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$ که با $f(x) = a + (b-a)x$ برای هر x واقع در $[0, 1]$ تعریف می‌شود، همتوانی $[a, b] \sim [0, 1]$ را برقرار می‌کند. بنابراین، برای هر دو عدد حقیقی c و d به قسمی که $c < d$ ، داریم $[a, b] \sim [c, d]$.

۱۲. گیریم اعداد حقیقی a, b, c ، و d به قسمی هستند که $a < b$ و $c < d$. ثابت کنید

(الف) $[0, 1] \sim [0, 1]$

(ب) $[a, b] \sim [c, d]$

(ج) $[c, d] \sim [c, d]$

۱۳. با فرضهای مسئله ۱۲، ثابت کنید

(الف) $[0, 1] \sim [0, 1]$

(ب) $[a, b] \sim [c, d]$

(ج) $[a, b] \sim [c, d]$

۳. چند مثال و ویژگی مجموعه‌های شمارای نامتناهی

مجموعه تمام اعداد طبیعی زوج \mathbb{N}_e و مجموعه تمام اعداد طبیعی فرد \mathbb{N}_o ، شمارای نامتناهی هستند (مسئله ۸، تمرین ۲۰۵). چون اجتماع این دو مجموعه شمارای نامتناهی یعنی $\mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_o (= \mathbb{N})$ شمارای نامتناهی است، قضیه بعدی قابل پیش‌بینی است.

۹. قضیه. اجتماع دو مجموعه شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

برهان. گیریم A و B دو مجموعه شمارای نامتناهی باشند. نشان خواهیم داد که $A \cup B$ در هر دو حالت زیر، شمارای نامتناهی است:

حالت ۱. $A \cap B = \emptyset$.

چون $A \sim \mathbb{N}$ و $A \sim \mathbb{N}_e$ ، داریم $A \sim \mathbb{N}_e$. همچنین، داریم $B \sim \mathbb{N}_o$. در نتیجه بنا بر قضیه ۶ داریم $(A \cup B) \sim (\mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_o) = \mathbb{N}$ ، که نشان می‌دهد $A \cup B$ شمارای نامتناهی است.

حالت ۲. $A \cap B \neq \emptyset$.

می‌نویسیم $A = B - C$. آنگاه $A \cup B = A \cup C$ و $A \cap C = \emptyset$ ؛ مجموعه $C \subseteq B$ یا متناهی است یا شمارای نامتناهی [نتیجه قضیه ۸]. اگر C متناهی باشد، بنا بر مسئله ۷ تمرین ۲.۵، $A \cup C$ شمارای نامتناهی است، درحالی‌که اگر C شمارای نامتناهی باشد، $A \cup C$ بنا بر حالت ۱ بالا شمارای نامتناهی است. پس مجموعه $A \cup B$ شمارای نامتناهی است.

نتیجه. گیریم A_1, A_2, \dots, A_n مجموعه‌های شمارای نامتناهی هستند. آنگاه $\bigcup_{k=1}^n A_k$ نیز شمارای نامتناهی است.

پرهان. به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

از خواننده می‌خواهیم که مثال بعدی را خود بررسی کند.

مثال ۴. مجموعه تمام اعداد صحیح \mathbb{Z} شمارای نامتناهی است.

قضیه ۱۰. مجموعه $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شمارای نامتناهی است.

پرهان. تابع $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ را که با

$$f(j, k) = 2^j 3^k \quad \forall (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

داده شده‌است، در نظر بگیرید. این تابع یک به یک است، بنابراین

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$$

چون $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ نامتناهی است، $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ نیز نامتناهی است. بنا بر قضیه ۸، $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ شمارای نامتناهی است و از این رو مجموعه $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ نیز شمارای نامتناهی است.

نتیجه. برای هر $k \in \mathbb{N}$ گیریم A_k یک مجموعه شمارای نامتناهی باشد که برای تمام j, k در شرط $A_j \cap A_k = \emptyset$ صدق می‌کند، آنگاه $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ شمارای نامتناهی است. ۱.

پرهان. برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، تابع $f_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \{k\}$ را با $f_k(j) = (j, k)$ برای هر $j \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم. بدیهی است که هر $f_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \{k\}$ یک تناظر یک به یک است. یعنی، $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \{k\}$. چون برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، $A_k \sim \mathbb{N}$ و $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \{k\}$ ، برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $A_k \sim \mathbb{N} \times \{k\}$. حال از مسئله ۵ تمرین ۲.۵ نتیجه می‌شود که $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \sim \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N} \times \{k\}$. اما مجموعه $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N} \times \{k\}$ برابر مجموعه شمارای نامتناهی $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ است. بنابراین، $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ شمارای نامتناهی است.

مثال ۵. \mathbb{Q} ، مجموعه تمام اعداد گویا، شمارای نامتناهی است.

۱. این نتیجه بدون فرض «برای هر $j \neq k$ ، $A_j \cap A_k = \emptyset$ » نیز صحیح است. مسئله ۷ را ببینید.

برهان. هر عدد گویا را با p/q که در آن $p \in \mathbb{Z}$ ، $q \in \mathbb{N}$ و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک p و q يك است، به صورتی یکتا* نمایش می‌دهیم. گیریم \mathbb{Q}_+ مجموعه تمام اعداد مثبت p/q است، و $\mathbb{Q}_- = \{-p/q \mid p/q \in \mathbb{Q}_+\}$. آنگاه $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_-$. بدیهی است که $\mathbb{Q}_+ \sim \mathbb{Q}_-$. از این رو، برای اینکه نشان دهیم \mathbb{Q} شمارای نامتناهی است، کافی است نشان دهیم که \mathbb{Q}_+ شمارای نامتناهی است. برای این منظور، تابع $f: \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ را که با $f(p/q) = (p, q)$ داده شده است، در نظر می‌گیریم. چون این تابع يك به يك است، داریم $f(\mathbb{Q}_+) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. چون $\mathbb{Q}_+ \sim f(\mathbb{Q}_+) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ است، نامتناهی است، $f(\mathbb{Q}_+)$ يك زیرمجموعه نامتناهی مجموعه شمارای نامتناهی $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ است. از این رو، $f(\mathbb{Q}_+)$ شمارای نامتناهی است و در نتیجه \mathbb{Q}_+ شمارای نامتناهی است. اکنون اثبات کامل است.

قضیه بعدی حاکی از این است که در واقع، مجموعه‌های شمارای نامتناهی از لحاظی در بین مجموعه‌های نامتناهی دارای کوچکترین «اندازه» هستند.

قضیه ۱۱. هر مجموعه نامتناهی شامل يك زیرمجموعه شمارای نامتناهی است.

برهان. فرض کنید X يك مجموعه نامتناهی است. چون $X \neq \emptyset$ ، می‌توانیم يك عنصر از مجموعه X انتخاب کنیم و آن را x_1 بنامیم. حال عنصری از $X - \{x_1\}$ را x_2 می‌نامیم. همچنین، x_2 را عنصری از مجموعه غیرتهی $X - \{x_1, x_2\}$ انتخاب می‌کنیم. این عمل را ادامه می‌دهیم، یعنی پس از اینکه x_{k-1} را بدین طریق مشخص کردیم، x_k را عنصری از $X - \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$ انتخاب می‌کنیم. برای هر $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد، زیرا X نامتناهی است و در نتیجه مطمئن هستیم که برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، $X - \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$ تهی نیست. مجموعه $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ يك زیرمجموعه شمارای نامتناهی X است، و بنابراین اثبات کامل است.

تمرین ۳-۵

۱. حکم مثال ۴ را ثابت کنید: مجموعه تمام اعداد صحیح \mathbb{Z} شمارای نامتناهی است.
۲. نتیجه قضیه ۹ را ثابت کنید.
۳. ثابت کنید که اجتماع تعدادی متناهی از مجموعه‌های شمارا، شماراست.
۴. ثابت کنید که اگر A و B مجموعه‌های شمارای نامتناهی باشند، $A \times B$ نیز شمارای نامتناهی است، بخصوص $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ و $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ شمارای نامتناهی هستند.
۵. يك تابع يك به يك $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ پیدا کنید و برهان دیگری برای مثال ۵ بیاورید.
۶. ثابت کنید که مجموعه تمام دایره‌های واقع در صفحه دکارتی که شعاع‌هایشان اعداد گویا و مختصات مرکزهایشان اعداد گویا هستند، شمارای نامتناهی است.

* یعنی اگر $p'/q' = p/q$ ، $p' \in \mathbb{Z}$ ، $q' \in \mathbb{N}$ و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک p' و q' يك باشد، آنگاه $p' = p$ و $q' = q$.

- ۰۷ ثابت کنید که اگر برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، B_k يك مجموعه شمارای نامتناهی باشد، آنگاه $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ شمارای نامتناهی است.
- ۰۸ ثابت کنید که اگر X يك مجموعه شمارا، و $f: X \rightarrow Y$ يك سورژکسیون باشد، آنگاه Y شماراست.
- ۰۹ ثابت کنید که هر مجموعه شمارای نامتناهی X يك زیرمجموعه شمارای نامتناهی مانند Y دارد به طوری که $X - Y$ شمارای نامتناهی است.
- ۰۱۰ ثابت کنید که مجموعه تمام چندجمله‌ایهای

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

- با ضرایب صحیح شمارای نامتناهی است. [راهنمایی: نتیجه قضیه ۱۰ را به کار برید].
- ۰۱۱ عدد جبری، بنا بر تعریف، هر ریشه حقیقی معادله $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ با ضرایب صحیح است. ثابت کنید که مجموعه تمام اعداد جبری شمارای نامتناهی است.
- ۰۱۲ ثابت کنید که مجموعه تمام زیرمجموعه‌های متناهی يك مجموعه شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

۰۳ مجموعه‌های ناشمارا

تمام مجموعه‌های نامتناهی‌ای که تاکنون دیده‌ایم، شمارا بوده‌اند. این مطلب ممکن است خواننده را به این فکر بیاندازد که شاید تمام مجموعه‌های نامتناهی، شمارا هستند. عموماً فکر می‌کنند که گتورگ کانتور، هنگامی که نظریه مجموعه‌ها را تدوین می‌کرد، نخست سعی کرد ثابت کند که هر مجموعه نامتناهی، شماراست. وقتی اثبات کرد که مجموعه ناشمارا وجود دارد، نتیجه برایش غیرمنتظره بود.

قضیه ۰۱۲. فاصله یکه باز $(0, 1)$ اعداد حقیقی، يك مجموعه ناشماراست.

برهان. نخست هر عدد x ، $0 < x < 1$ ، را با بسط اعشاری آن به صورت $0. x_1 x_2 x_3 \dots$ که در آن به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ، نشان می‌دهیم. مثلاً، $1/3 = 0.333\dots$ ، $\sqrt{2}/2 = 0.707106\dots$. برای اینکه وقتی بسط اعشاری عددی، مانند $0.25 = 1/4$ ، محدود است، نمایش یکتایی از اعداد نامتناهی داشته باشیم، قرار می‌گذاریم که از رقم آخر یکی کم کرده و رقمهای بعدی را ۹ بنویسیم، بنابراین می‌نویسیم $0.24999\dots = 1/4$ ، نه $0.25000\dots$. با این قرارداد، دو عدد در فاصله $(0, 1)$ مساوی هستند اگر و تنها اگر رقمهای متناظر بسط اعشاری آنها یکی باشند. از این رو، اگر دو عدد $x = 0. x_1 x_2 x_3 \dots$ و $y = 0. y_1 y_2 y_3 \dots$ در يك رقم اعشاری، مثلاً در k امین، متفاوت باشند؛ $x_k \neq y_k$ ، آنگاه $x \neq y$. در برهان ما این یکی از نکته‌های اصلی است.

حال فرض کنید که مجموعه $(0, 1)$ شمارای نامتناهی است. آنگاه يك تناظر يك به يك

$f: \mathbb{N} \sim (0, 1)$ وجود دارد. از این رو می‌توانیم تمام عناصر $(0, 1)$ را به صورت زیر مرتب کنیم:

$$\begin{aligned}
 f(1) &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\
 f(2) &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\
 f(3) &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}\dots \\
 &\vdots \\
 f(k) &= 0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\dots \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{*}$$

که در آن، هر $a_{jk} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. اکنون عدد $z \in (0, 1)$ را چنان می‌سازیم که با هیچ يك از $f(k)$ های بالا برابر نباشد. از این تناقض نتیجه می‌شود که فرض قبلی ما مبنی بر شمارای نامتناهی بودن $(0, 1)$ نادرست است و بنا بر این مجموعه $(0, 1)$ ناشماراست. عدد $z = 0.z_1z_2z_3\dots$ را چنین تعریف می‌کنیم: برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، اگر $a_{kk} \neq 5$ ، $z_k = 5$ و اگر $a_{kk} = 5$ ، $z_k = 1$. بدیهی است که عدد $z = 0.z_1z_2z_3\dots$ در شرط $0 < z < 1$ صدق می‌کند؛ اما $z \neq f(1)$ زیرا $z_1 \neq a_{11}$ و $z \neq f(2)$ زیرا $z_2 \neq a_{22}$ ، و در حالت کلی $z \neq f(k)$ زیرا به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ ، $z_k \neq a_{kk}$. بنا بر این $f(\mathbb{N}) = (0, 1)$ ، که يك تناقض است، بنا بر این اثبات کامل است.

نتیجه. مجموعه تمام اعداد حقیقی \mathbb{R} ، ناشماراست.

پرهان. در مثال ۳ (ب) ثابت کردیم که $\mathbb{R} \sim (0, 1)$. حال چون $(0, 1)$ ناشماراست، \mathbb{R} که هم‌توان آن است، نیز ناشماراست (مسئله ۱ را ببینید).

مثال ۶. مجموعه تمام اعداد گنگ، ناشماراست.

پرهان. در مثال ۵، نشان داده‌ایم که مجموعه تمام اعداد گویای \mathbb{Q} شمارای متناهی است. مجموعه تمام اعداد گنگ، بنا بر تعریف، $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ است. به آسانی می‌توان دید که $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ يك مجموعه نامتناهی است. برای اینکه نشان دهیم $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ناشماراست، خلاف آن را فرض می‌کنیم، یعنی $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ را شمارای نامتناهی می‌گیریم. آنگاه نتیجه می‌شود که $\mathbb{R} = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ شمارای نامتناهی است (قضیه ۹). اما این، نتیجه قضیه ۱۲ را نقض می‌کند. پس مجموعه تمام اعداد گنگ، $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ، ناشماراست.

دوئلکاد. (۱) روشی که در پرهان قضیه ۱۲، به کار رفته است، روش قطری کانتور نامیده می‌شود، زیرا از ابتکارهای کانتور است و در جدول ارقام (*)، ارقام عدد

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$ اصلای ارقام قطر اصلی $z = 0z_1z_2z_3\dots$ که کلید برهان است بر اساس ارقام قطر اصلی تشکیل شده‌اند. گرچه ممکن است درك ارزش این برهان برای دانشجویان مبتدی آسان نباشد، نبوغ کانتور با این برهان آشکار می‌شود.

(۲) وجود مجموعه‌های نامشمارا نشان می‌دهد که مجموعه‌های نامتناهی از رده‌هایی تشکیل شده‌اند. در فصل بعد خواهیم دید که درحقیقت مجموعه‌های نامتناهی «رده‌های هم‌توانی» فراوان دارند.

تمرین ۴.۵

۱. گیریم A و B دو مجموعه هم‌توان هستند. ثابت کنید که اگر A نامشمارا باشد، B نیز نامشماراست.
۲. ثابت کنید که هر فوق مجموعه يك مجموعه نامشمارا، نامشماراست.
۳. با استفاده از نتیجه مسئله ۲ یا ۱، برهان دیگری برای نتیجه قضیه ۱۲ بیاورید.
۴. ثابت کنید که مجموعه تمام اعداد گنگ بین ۰ و ۱ نامشماراست.
۵. عدد متعالی، بنا بر تعریف، يك عدد حقیقی غیر جبری است (مسئله ۱۱، تمرین ۳.۵ را ببینید). ثابت کنید که مجموعه تمام اعداد متعالی نامشماراست.
۶. گیریم $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$. ثابت کنید $S' \sim \mathbb{R}$ و از این رو نامشماراست.
۷. ثابت کنید که مجموعه A نامشماراست اگر و تنها اگر $A \times A$ نامشمارا باشد.
۸. ثابت کنید که اگر مجموعه‌های A و B به قسمی باشند که $A \times B$ نامشمارا باشد، آنگاه یا A یا B نامشماراست.
۹. ثابت کنید که اگر $k \in \mathbb{N}$ و مجموعه‌های A_1, A_2, \dots, A_k به قسمی باشند که $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ نامشمارا باشد، آنگاه $j \in \mathbb{N}_k$ وجود دارد به قسمی که A_j نامشماراست.
۱۰. ثابت کنید که اگر $k \in \mathbb{N}$ و مجموعه‌های A_1, A_2, \dots, A_k به قسمی باشند که $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ نامشمارا باشد، آنگاه يك $j \in \mathbb{N}_k$ وجود دارد به قسمی که A_j نامشماراست.
۱۱. ثابت کنید که اگر مجموعه‌های A و B به قسمی باشند که $A \oplus B$ نامشمارا باشد، آنگاه یا A یا B نامشماراست. آیا عکس آن درست است؟

اعداد اصلی و حساب اعداد اصلی

مفهوم اعداد اصلی را معرفی می‌کنیم. ویژگیهای مشابه و تمایز بین اعداد اصلی متناهی و شمارناهی را ضمن شناسائی حساب اعداد اصلی - جمع، ضرب، و توانرسانی - عرضه می‌کنیم. فصل را با تبصره‌ای دربارهٔ فرض پیوستار (تعمیم یافته) که جنبهٔ تاریخی دارد خاتمه می‌دهیم.

۱. مفهوم اعداد اصلی

مفهوم عدد از قدیم به‌طور طبیعی وارد زندگی ما شده‌است. ما می‌توانستیم مثلاً، تشابه بین سه سیب و سه پرتقال، و تمایز بین دو انگشت و چهار انگشت را درک کنیم. گرچه مفهومی از عدد داشتیم، اکثراً تعریفی دقیق از عدد نداشتیم. مثلاً می‌دانستیم که، $2 + 3 = 5$ ، $2 < 3$ ، $3 \times 7 = 22$ و غیره. این موجب می‌شود معتقد شویم که احتیاجی نیست که واقعاً بدانیم عدد چیست؛ چیزی که باید بدانیم تساوی و ترتیب بین اعداد است و بدانیم چگونه با اعداد محاسبه کنیم - درست مثل شطرنج بازها که علاقه‌مند نیستند بدانند که اسب در بازی شطرنج چیست بلکه باید با حرکتهای آن آشنا باشند. بنابراین در اینجا

عدد اصلی را تعریف نمی‌کنیم، بلکه آن را به‌عنوان يك مفهوم اولیه برای «اندازه» مجموعه‌ها معرفی می‌کنیم. مهمترین قاعده‌های راهنمای این مفهوم جدید عبارت‌اند از:

الف-۱. هر مجموعه A با يك عدد اصلی مربوط است که با $\text{card } A$ نمایش داده می‌شود و برای هر عدد اصلی a يك مجموعه A وجود دارد به طوری که $\text{card } A = a$.

الف-۲. $\text{card } A = 0$ اگر و تنها اگر $A = \emptyset$.

الف-۳. اگر A يك مجموعه متناهی غیر تهی باشد؛ یعنی، برای يك $k \in \mathbb{N}$

$$\text{card } A = k, A \sim \{1, 2, \dots, k\}$$

الف-۴. برای هر دو مجموعه A و B ، $\text{card } A = \text{card } B$ اگر و تنها اگر $A \sim B$.
 قاعده‌های الف-۲ و الف-۳ اعداد اصلی مجموعه‌های متناهی را تعریف می‌کنند. عدد اصلی يك مجموعه متناهی تعداد عنصرهای آن مجموعه است. در نظریه مجموعه‌ها با روش اصل موضوعی، الف-۱ و الف-۲ را معمولاً يك اصل موضوع می‌گیرند، به نام اصل موضوع اعداد اصلی. ممکن است پذیرفتن قاعده‌های الف-۱ و الف-۲ برای خواننده مبتدی مشکل باشد، زیرا این قاعده‌ها وقتی A نامتناهی است، چیز زیادی درباره $\text{card } A$ نمی‌گوید. این اشکال در ضمن ادامه بحث به تدریج برطرف خواهد شد. درست شبیه به این است که دانشجو تنها پس از اینکه حدود نیمی از درس حساب دیفرانسیل و انتگرال را می‌خواند موضوع درس را می‌فهمد. در این مرحله اجمالاً می‌توانیم بگوییم که عدد اصلی يك مجموعه، ویژگی مشترکی است بین مجموعه و تمام مجموعه‌های هم‌توان خود.

تمرین ۱۰۶

۱. نشان دهید که اعداد طبیعی، اعداد اصلی هستند.
۲. سه عدد اصلی بیابید که عدد طبیعی نباشند.
۳. نشان دهید که $\text{card } \mathbb{N} = \text{card } \mathbb{Z} = \text{card } \mathbb{Q} = \text{card } \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
۴. فرض کنیم A يك مجموعه باشد و x عنصر A نباشد. ثابت کنید که اگر $\text{card}(A \cup \{x\}) = \text{card } A$ ، آنگاه A نامتناهی است.
۵. آیا عکس مسئله ۴ درست است؟
۶. ثابت کنید که اگر $\text{card } A = \text{card } B = \text{card } \mathbb{N}$ ، آنگاه $\text{card}(A \cup B) = \text{card } B$.
۷. فرض کنیم $\mathbb{N}^1 = \mathbb{N}$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\mathbb{N}^{n+1} = \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$. ثابت کنید

۱. شاید لازم باشد خواننده بداند که اعداد اصلی را می‌توان اعداد ترتیبی آغازی، تعریف کرد. صفحه ۱۸۱ را ببینید.

* card چهار حرف اول cardinal number به معنای عدد اصلی است. م.

مرتب کردن اعداد اصلی-قضیه شرودر-برنشتاین ۱۳۳

(الف) برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، $\text{card } \mathbb{N}^k = \text{card } \mathbb{N}$

(ب) $\text{card } \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k = \text{card } \mathbb{N}$

۲. مرتب کردن اعداد اصلی-قضیه شرودر-برنشتاین

عدد اصلی يك مجموعه متناهي را عدد اصلی متناهي، و عدد اصلی يك مجموعه نامتناهي را عدد اصلی ترامتناهي (یا ترانسفینی) می نامیم. قاعده های الف-۲ و الف-۳ از بخش قبل نشان می دهند که اعداد اصلی متناهي دقیقاً اعداد صحیح نامنفی هستند. از این رو، اعداد اصلی متناهي دارای ترتیب طبیعی ذاتی $0 < 1 < 2 < \dots < k < k+1 < \dots$ هستند. در مورد دو عدد اصلی ترامتناهي، قاعده الف-۲ مشخص می کند چه وقت این دو عدد مساوی هستند و چه وقت نیستند. این برای ما کافی نیست؛ وقتی آنها نامساوی اند می خواهیم بتوانیم بگوییم کدام يك «کوچکتر» از دیگری است.

تعریف ۱. دو مجموعه A و B مفروض اند. می گوییم $\text{card } A$ کوچکتر از $\text{card } B$ یا مساوی با آن است، $\text{card } A \leq \text{card } B$ ، هر گاه مجموعه A با يك زیرمجموعه B همخوان باشد. اگر $\text{card } A \leq \text{card } B$ و $\text{card } A \neq \text{card } B$ ، آنگاه می نویسیم $\text{card } A < \text{card } B$.

اگر چه این تعریف را برای مرتب کردن اعداد اصلی ترامتناهي آورده ایم، اما در مورد اعداد اصلی متناهي هم می توان آن را به کار برد، و از این راه هم به همان ترتیب طبیعی سنتی، که در بالا ذکر شد، می رسم.

مثال ۱. $\text{card } \mathbb{N} < \text{card } \mathbb{R}$

پوهان. چون \mathbb{N} يك زیرمجموعه \mathbb{R} است، \mathbb{N} همخوان با يك زیرمجموعه \mathbb{R} است، یعنی $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ، اما در بخش ۴، فصل ۵ دیدیم که مجموعه نامتناهي \mathbb{R} ، نامساوی است. بنابراین \mathbb{R} با هیچ يك از زیرمجموعه های \mathbb{N} همخوان نیست. پس بنا بر تعریف ۱، $\text{card } \mathbb{N} < \text{card } \mathbb{R}$.

تا کنون برای ما روشن نیست که وقتی مجموعه A همخوان با يك زیرمجموعه B است و مجموعه B نیز همخوان با يك زیرمجموعه A است، چگونه دو عدد $\text{card } A$ و $\text{card } B$ را با هم مقایسه کنیم. گئورگ کانتور حدس زد که در این حالت $\text{card } A$ باید با $\text{card } B$ مساوی باشد. بعد در دهه ۱۸۹۰ برنشتاین* درسمینار کانتور، و شرودر** بر پایه يك حساب منطقی، مستقل از یکدیگر، این حدس کانتور را ثابت کردند. این نتیجه مشهور امروزه عموماً به نام قضیه شرودر-برنشتاین معروف است.

* F. Bernstein

** E. Schröder

قضیه ۰۱ (قضیه شرودر-برنشتاین) اگر دو مجموعه A و B به قسمی باشند که A با یک زیر مجموعه B هم‌توان باشد و B نیز با یک زیر مجموعه A هم‌توان باشد، آنگاه A و B هم‌توان هستند.

ما نخست حالت خاصی از قضیه ۱ را ثابت می‌کنیم و از آن به آسانی قضیه ۱ را نتیجه می‌گیریم.

لم. اگر B یک زیر مجموعه A باشد و اگر یک انزکسیون $f: A \rightarrow B$ وجود داشته باشد، آنگاه یک بیژکسیون $h: A \sim B$ وجود دارد.

برهان. اگر B خود A باشد، تابع همانی روی A یک h است. پس B را یک زیر مجموعه سره A می‌گیریم. فرض می‌کنیم C مجموعه $\bigcup_{n \geq 0} f^n(A-B)$ باشد، که در آن f^0 تابع همانی روی A است و به ازای هر عدد صحیح مثبت k و هر $x \in A$ ، $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$ تابع $h(z)$ را به ازای هر z در A ، به طریق زیر تعریف کنید:

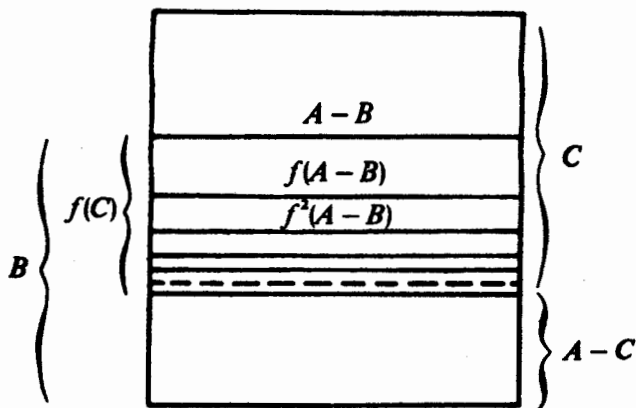
$$h(z) = \begin{cases} f(z) & \text{اگر } z \in C \\ z & \text{اگر } z \in A-C \end{cases}$$

توجه کنید که $A-B$ زیر مجموعه C است، $f(C) \subseteq C$ ، و اگر m و n دو عدد صحیح نامنفی متمایز باشند، مثلاً $m < n$ ، آنگاه $f^m(A-B)$ و $f^n(A-B)$ دو مجموعه مجزا هستند. زیرا، اگر x و $x' \in A-B$ وجود داشته باشند به طوری که $f^m(x) = f^n(x')$ ، آنگاه داریم $f^{n-m}(x') = x \in B \cap (A-B)$ که یک تناقض است. بالاخره، بنا بر تعریف h و تذکار اخیر، داریم

$$\begin{aligned} h(A) &= (A-C) \cup f(C) \\ &= \left[A - \bigcup_{n \geq 0} f^n(A-B) \right] \cup f \left(\bigcup_{n \geq 0} f^n(A-B) \right) \\ &= \left[A - \bigcup_{n \geq 0} f^n(A-B) \right] \cup \left[\bigcup_{n \geq 1} f^n(A-B) \right] \\ &= A - (A-B) \\ &= B \end{aligned}$$

از آنچه گفته شد و از اینکه f انزکتیو است، نتیجه می‌شود که $h: A \rightarrow B$ یک بیژکسیون است. پس برهان لم کامل است.

نکته اصلی برهان بالا در شکل گویای زیر نمایانده شده است. در این شکل مجموعه A تمام مستطیل است.



شکل ۱۷

برهان (قضیه ۱). گیریم A_0 و B_0 به ترتیب زیر مجموعه‌های A و B هستند به‌قسمی که $A \sim B_0$ و $B \sim A_0$ ، و فرض کنیم $f_0: A \sim B_0$ و $g_0: B \sim A_0$ دو بیژکسیون هستند. تابع $f: A \rightarrow A_0$ را با $f(x) = g_0(f_0(x))$ تعریف می‌کنیم، که یک بیژکسیون است. پس بنا بر لم بالا یک بیژکسیون $h: A \sim A_0$ وجود دارد. در نتیجه $h: A \sim A_0$ که ترکیب دو بیژکسیون $h: A \sim A_0$ و $g_0^{-1}: A_0 \sim B$ است، یک بیژکسیون است.

نتیجه. اگر A و B دو مجموعه باشند به‌قسمی که $\text{card } A \leq \text{card } B$ و $\text{card } B \leq \text{card } A$ ، آنگاه $\text{card } A = \text{card } B$.

تاکنون اطلاعات اندکی در باره اعداد اصلی ترامتاهی داریم، زیرا فقط با دو عدد اصلی ترامتاهی، $\text{card } \mathbb{N}$ و $\text{card } \mathbb{R}$ آشنا شده‌ایم. طبیعی است بخواهیم بدانیم که آیا اعداد اصلی ترامتاهی دیگری وجود دارند؟ پاسخ این سؤال در بخش بعدی آمده است. سدرحقیقت تعداد نامحدودی عدد اصلی ترامتاهی وجود دارد.

سؤال مهم دیگر این است: اگر m و n دو عدد اصلی متمايز باشند آنگاه $m < n$ یا $n < m$ ؛ آیا این مطلب برای اعداد اصلی ترامتاهی نیز درست است؟ پاسخ مثبت است. و چون برهان آن به یکی از نتیجه‌های فصل بعدی بستگی دارد، این پاسخ در قضیه ۴ فصل بعد آمده است.

۱. این برهان و لم قبلی از مقاله:

R. H. Cox "A proof of the Schröder. Bernstein Theorem" American Mathematical Monthly, 75, No. 5 (1968), 508.

اقتباس شده است.

تمرین ۲۰۶

۱. گیریم n يك عدد اصلی متناهی است. ثابت کنید که $n < \text{card } \mathbf{N}$.
۲. گیریم a يك عدد اصلی ترامتاهی است. ثابت کنید که $\text{card } \mathbf{N} \leq a$. از این رو، $\text{card } \mathbf{N}$ کوچکترین عدد اصلی ترامتاهی است.
۳. دو مجموعه A و B مفروض‌اند. ثابت کنید که $\text{card } A \leq \text{card } B$ اگر و تنها اگر يك انزکسیون $f: A \rightarrow B$ وجود داشته باشد.
۴. سه مجموعه A, B, C مفروض‌اند. ثابت کنید که
 (الف) اگر $\text{card } A \leq \text{card } B$ و $\text{card } B \leq \text{card } C$ ، آنگاه $\text{card } A \leq \text{card } C$.
 (ب) اگر $\text{card } A < \text{card } B$ و $\text{card } B < \text{card } C$ ، آنگاه $\text{card } A < \text{card } C$.
۵. سه مجموعه A, B, C مفروض‌اند. ثابت کنید که
 (الف) اگر $\text{card } A \leq \text{card } B$ و $\text{card } B < \text{card } C$ ، آنگاه $\text{card } A < \text{card } C$.
 (ب) اگر $\text{card } A < \text{card } B$ و $\text{card } B \leq \text{card } C$ ، آنگاه $\text{card } A < \text{card } C$.
۶. ثابت کنید که اگر A و B دو مجموعه باشند و $A \subseteq B$ ، آنگاه $\text{card } A \leq \text{card } B$.
۷. ثابت کنید که اگر مجموعه‌های A, B, C به طوری باشند که $A \subseteq B \subseteq C$ و $A \sim C$ ، آنگاه $A \sim B$.
۸. نشان دهید که $\text{card } \mathbf{N} < \text{card } \mathbf{R}$.
۹. گیریم A يك مجموعه است و x عنصر A نیست. ثابت کنید که اگر

$$\text{card } A < \text{card } (A \cup \{x\})$$
 آنگاه A متناهی است.

۳. عدد اصلی يك مجموعه توانی-قضیه کانتور

گیریم X يك مجموعه است. یادآوری می‌شود که مجموعه توانی X ، یعنی $\mathcal{P}(X)$ ، مجموعه تمام زیرمجموعه‌های X است (بخش ۲، فصل ۲). گنورگ کانتور خود ثابت کرد که $\text{card } X < \text{card } \mathcal{P}(X)$. اهمیت این قضیه در آن است که شیوه‌ای برای درست کردن يك دنباله بینهایت از اعداد اصلی (ترامتاهی) جدید به دست می‌دهد. مثلاً، داریم

$$\text{card } \mathbf{R} < \text{card } \mathcal{P}(\mathbf{R}) < \text{card } \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{R})) < \dots$$

قضیه ۲. (قضیه کانتور). اگر X يك مجموعه باشد، آنگاه $\text{card } X < \text{card } \mathcal{P}(X)$.

برهان. اگر $X = \emptyset$ ، آنگاه $\text{card } \mathcal{P}(\emptyset) = 1 > 0 = \text{card } \emptyset$. پس باقی می‌ماند که حالت $X \neq \emptyset$ ثابت شود. در این حالت تابع $g: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ که با $g(x) = \{x\} \in \mathcal{P}(X)$ برای هر $x \in X$ ، تعریف می‌شود انزکنیو است. بنابراین، مجموعه X با زیرمجموعه $\{\{x\} | x \in X\}$ از $\mathcal{P}(X)$ هم‌توان است، یا به عبارت دیگر، $\text{card } X \leq \text{card } \mathcal{P}(X)$. پس، برای اینکه نشان داده شود که $\text{card } X < \text{card } \mathcal{P}(X)$

عدد اصلی يك مجموعه توانی-قضیه کانتور ۱۳۷

کافی است نشان داده شود که X با $\mathcal{P}(X)$ هم‌توان نیست.
 خلاف آن را فرض کنید، یعنی فرض کنید يك بیژ کسیون $f: X \sim \mathcal{P}(X)$ وجود دارد؛ می‌خواهیم ثابت کنیم که با این فرض به يك تناقض می‌رسیم. مجموعه $S = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه عبارت است از تمام عنصرهای X که در نگاره‌های f تحت f خودشان نیستند. چون $S \in \mathcal{P}(X)$ و فرض کردیم $f: X \sim \mathcal{P}(X)$ ، يك عنصر $e \in X$ وجود دارد به‌قسمی که $f(e) = S$. اکنون یا $e \in S$ یا $e \notin S$.

حالت ۱. $e \in S$.

از تعریف S نتیجه می‌شود که $e \notin f(e)$ ؛ که غیرممکن است زیرا $f(e) = S$ و $e \in S$.

حالت ۲. $e \notin S$.

چون $f(e) = S$ ، داریم $e \notin f(e)$. در نتیجه، بنا بر تعریف S ، $e \in S$ و از این رو $e \in f(e)$. این نیز غیرممکن است.
 پس در هر دو حالت به تناقض رسیدیم و برهان قضیه کانتور کامل است.

بسیار طبیعی است که همراه با قضیه کانتور این سؤال مطرح شود: آیا عددی اصلی، مانند x ، وجود دارد به‌قسمی که

$$\text{card } \mathbb{N} < x < \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

این سؤال، که مسئله پیوستادی نامیده می‌شود، فکر کانتور و دیگر ریاضیدانان را مدت زیادی به‌خود مشغول کرد. در بخش ۸ درباره این مسئله گفتگو خواهیم کرد.

تمرین ۳.۶

۱. نشان دهید که بزرگ‌ترین عدد اصلی وجود ندارد.
۲. گیریم A و B مجموعه هستند. ثابت کنید که اگر $A \sim B$ آنگاه

$$\text{card } \mathcal{P}(A) = \text{card } \mathcal{P}(B)$$

۳. گیریم A يك مجموعه شمارای نامتناهی است. ثابت کنید $\mathcal{P}(A)$ ، مجموعه توانی A ، ناشماراست.
۴. ثابت کنید که مجموعه تمام زیرمجموعه‌های نامتناهی \mathbb{N} ناشماراست. [راهنمایی: مسئله ۱۲، تمرین ۳.۵ را به‌کار برید]
۵. با استفاده از قضیه کانتور (قضیه ۲) ثابت کنید که مجموعه تمام مجموعه‌ها وجود ندارد.

۴. جمع اعداد اصلی

با حساب اعداد اصلی متاهی آشنا هستیم. مثلاً، اگر k و l دو عدد اصلی متاهی باشند، مجموع $k+l$ و حاصلضرب kl همان معنی معمولی خود را دارند. اکنون تلاش می‌کنیم این حساب را تعمیم دهیم تا شامل اعداد اصلی ترامتاهی نیز بشود؛ یعنی حسابی بسازیم که در تمام اعداد اصلی، متاهی یا ترامتاهی، به کار رود، و بدگونه‌ای باشد که معانی و ویژگیهای حساب سنتی اعداد اصلی متاهی محفوظ بماند.

تعریف ۲. بگیریم a و b اعدادی اصلی هستند. مجموع اصلی a و b ، که با $a+b$ نشان داده می‌شود، عدد اصلی $\text{card}(A \cup B)$ است که در آن A و B مجموعه‌های مجزا و به گونه‌ای هستند که $\text{card} A = a$ و $\text{card} B = b$.

برای اینکه نشان داده شود که تعریف ۲ خوش تعریف است*، خواننده باید نخست بداند که برای هر دو عدد اصلی a و b (نه لزوماً متمایز)، بنا بر قاعده الف-۱ بخش ۱، مجموعه‌هایی مانند X و Y وجود دارند به طوری که $\text{card} X = a$ و $\text{card} Y = b$. اما ممکن است مجموعه‌های X و Y مجزا نباشند. در این صورت می‌نویسیم: $A = X \times \{0\}$ و $B = Y \times \{1\}$ ؛ آنگاه $A \sim X$ ، $B \sim Y$ ، و $A \cap B = \emptyset$. پس $\text{card}(A \cup B) = a+b$ و عددی یکتاست، زیرا اگر مجموعه‌های مجزای دیگری مانند A' و B' وجود داشته باشد که $A \sim A'$ و $B \sim B'$ ، آنگاه بنا بر قضیه ۶ فصل ۴، داریم $(A \cup B) \sim (A' \cup B')$ یا به عبارت دیگر، $\text{card}(A' \cup B') = \text{card}(A \cup B)$. پس قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم:

قضیه ۳. اعداد اصلی a و b مفروض‌اند. آنگاه

(الف) مجموعه‌های مجزای A و B وجود دارند به قسمی که $\text{card} A = a$ و $\text{card} B = b$.

(ب) اگر مجموعه‌های A ، B ، A' ، و B' به قسمی باشند که $\text{card} A' = \text{card} A$ ،

$$A' \cap B' = \emptyset \text{ و } A \cap B = \emptyset, \text{ card } B' = \text{card } B$$

$$\text{card}(A' \cup B') = \text{card}(A \cup B) \text{ آنگاه}$$

مثالهای زیر نشان می‌دهند که تعریف ۲ در مورد اعداد اصلی متاهی، با مجموع معمولی دو عدد طبیعی مطابقت دارد.

مثال ۲. $۳+۴$ ، مجموع اصلی دو عدد اصلی ۳ و ۴ را بیابید.

* مقصود از «خوش تعریف است» این است که $a+b$ بدون ابهام تعریف می‌شود. خوش تعریفی در اینجا مطرح است، زیرا اولاً واضح نیست که دو مجموعه A و B که در شرایط تعریف ۲ صدق کنند وجود دارند و ثانیاً روشن نیست که $a+b$ به انتخاب A و B بستگی ندارد. م.

جمع اعداد اصلی ۱۳۹

حل: چون $\text{card } N_f = 4, N_g = N_f \cup \{5, 6, 7\}$ و مجموعه‌های N_f و $\{5, 6, 7\}$ مجزا هستند، داریم

$$\begin{aligned} 4 + 3 &= \text{card}(N_f \cup \{5, 6, 7\}) \\ &= \text{card } N_g = 7 \end{aligned}$$

که با مجموع معمولی دو عدد صحیح مطابقت دارد. چون اجتماع مجموعه‌ها جابه‌جایی و شرکتپذیر است، ویژگی‌های مربوطه زیر را دربارهٔ جمع اصلی داریم.

قضیه ۴. گیریم x, y, z اعداد اصلی دلخواه هستند. آنگاه

(الف) $x + y = y + x$ (جابه‌جایی)

(ب) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (شرکتپذیری)

به پیروی از گنورک کانتور، نماد \aleph_0 (بخوانید الف صفر؛ اولین حرف الفبای عبری است) برای نشان دادن عدد اصلی یک مجموعه شمارای نامتناهی و c برای عدد اصلی پیوستار به کار می‌روند؛ پیوستار یعنی مجموعه اعداد حقیقی. به عبارت دیگر $\aleph_0 = \text{card } \mathbb{N}$ و $c = \text{card } \mathbb{R}$.

مثال ۳. مجموع اصلی $\aleph_0 + \aleph_0$ را بیابید.

حل: گیریم N_e و N_o به ترتیب مجموعه اعداد طبیعی زوج و مجموعه اعداد طبیعی فرد هستند. آنگاه N_e و N_o زیرمجموعه‌های شمارای نامتناهی و مجزای مجموعه \mathbb{N} هستند، و اجتماع آنها \mathbb{N} است. در نتیجه، بنا بر تعریف ۲،

$$\begin{aligned} \aleph_0 + \aleph_0 &= \text{card } N_e + \text{card } N_o \\ &= \text{card}(N_e \cup N_o) \\ &= \text{card } \mathbb{N} \\ &= \aleph_0 \end{aligned}$$

نتیجهٔ مثال ۳ یک ویژگی اختصاصی اعداد اصلی نامتناهی است؛ زیرا در اعداد اصلی متناهی $n + m = n$ تنها به ازای $m = 0$ راست است. توصیه می‌شود خواننده به عنوان تمرین ثابت کند که $c + c = c$.

مثال ۴. مجموع اصلی $\aleph_0 + c$ را بیابید.

حل: در مثال ۳، بخش ۲، فصل ۵ دیدیم که فاصلهٔ باز $(0, 1)$ و مجموعه اعداد

حقیقی \mathbf{R} هم‌توان هستند. از این‌رو $\text{card}(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \text{card} \mathbf{R} = c$. می‌نویسیم $S = \mathbf{N} \cup (\mathbf{0}, \mathbf{1})$. آنگاه چون \mathbf{N} و $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ مجزا هستند، $\text{card} S = \aleph_0 + c$. از طرف دیگر، چون $(\mathbf{0}, \mathbf{1}) \subset S \sim \mathbf{R}$ و $S \sim \aleph_0 + c$ ، بنا بر قضیهٔ شرودر-برنشتاین (قضیهٔ ۱)، داریم $S \sim \mathbf{R}$. بنابراین $\aleph_0 + c = c$.

تمرین ۴۰۶

۱. ثابت کنید که برای هر عدد اصلی x ، $x + \mathbf{0} = x$.
۲. گیریم x و y اعدادی اصلی هستند. ثابت کنید که $x + y = y + x$.
۳. گیریم x ، y ، و z اعدادی اصلی هستند. ثابت کنید که $(x + y) + z = x + (y + z)$.
۴. گیریم n عدد اصلی متناهی دلخواهی است. ثابت کنید
 (الف) $n + \aleph_0 = \aleph_0$
 (ب) $n + c = c$
۵. ثابت کنید که $c + c = c$.
۶. گیریم x ، y ، و z اعدادی اصلی هستند
 (الف) ثابت کنید که اگر $x \leq y$ آنگاه $x + z \leq y + z$
 (ب) با يك مثال نشان دهید که اگر در قسمت (الف) به جای « \leq » نماد « $<$ » گذاشته شود، حکم الف درست نیست.
۷. گیریم x ، y ، و z اعداد اصلی هستند. ثابت کنید که اگر $x = y$ آنگاه $x + z = y + z$.
۸. با يك مثال نقیض نشان دهید که عکس مسئلهٔ ۷ بالا درست نیست.
۹. ثابت کنید که برای هر مجموعهٔ A و B ،

$$\text{card} A + \text{card} B = \text{card}(A \cup B) + \text{card}(A \cap B)$$

۱۰. ثابت کنید که اگر a يك عدد اصلی ترانتهای باشد، آنگاه $a + \mathbf{1} = a$. [راهنمایی: از قضیهٔ شرودر-برنشتاین استفاده کنید].
۱۱. ثابت کنید که اگر n يك عدد اصلی متناهی، و a يك عدد اصلی ترانتهای باشد، آنگاه $a + n = a$.
۱۲. عکس مسئلهٔ ۱۱ بالا را ثابت کنید.

۵. ضرب اعداد اصلی

اکنون ضرب اعداد اصلی را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که نتیجه در مورد اعداد اصلی متناهی، با ضرب معمولی اعداد صحیح نامنفی مطابقت داشته باشد.

* $(\mathbf{0}, \mathbf{1}) \subset S \sim \mathbf{R}$ و $S \sim S \subset \mathbf{R}$ به ترتیب خلاصهٔ $(\mathbf{0}, \mathbf{1}) \subset S$ ، $\mathbf{R} \sim S$ هستند. $S \subset \mathbf{R}$ ، $S \sim S$

تعریف ۳. برای هر دو عدد اصلی a و b ، حاصلضرب اصلی ab ، عدد اصلی حاصلضرب دکارتی $A \times B$ تعریف شده است، که در آن $\text{card } A = a$ و $\text{card } B = b$. برای اینکه بینیم تعریف ۳ مستقل از انتخاب مجموعه‌های A و B است، مجموعه‌های X و Y را به قسمی می‌گیریم که $A \sim X$ و $B \sim Y$. آنگاه بنا بر قضیه ۷ فصل ۵ $A \times B \sim X \times Y$ و از این رو $\text{card}(A \times B) = \text{card}(X \times Y)$. همچنین آشکار است که با این تعریف، هنگامی که a و b اعداد اصلی منتهای هستند، جواب درست به دست می‌آید. چون همگی با ضرب اعداد صحیح نامنفی آشنا هستیم، توجه ما به حاصلضرب اعداد اصلی ترانتهای و حاصلضرب یک عدد اصلی منتهای در یک عدد اصلی ترانتهای است. نخست به چند نتیجه ساده تعریف ۳ می‌پردازیم.

قضیه ۵. گیریم x, y, z اعداد اصلی دلخواه باشند. آنگاه

(الف) $xy = yx$ (جا به جایی).

(ب) $(xy)z = x(yz)$ (شرکتپذیری).

(ج) $x(y+z) = xy + xz$ (پخشپذیری).

برهان. به عنوان تمرین از خواننده خواسته شده است.

مثال ۵. گیریم x یک عدد اصلی دلخواه است. مقادیر زیر را به دست آورید.

(الف) $1x$

(ب) $0x$

(ج) $\aleph_0 \aleph_0$.

حل: گیریم مجموعه A به قسمی است که $\text{card } A = x$. (الف) چون حاصلضرب دکارتی $\{1\} \times A$ با مجموعه A هم‌توان است، داریم

$1x = x$

(ب) چون $\emptyset \times A = \emptyset$ ، داریم $0x = 0$

(ج) چون $\aleph_0 \times \aleph_0 \sim \aleph_0$ (قضیه ۱۰، فصل ۵)، داریم $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$.

مثال ۶. ثابت کنید $cc = c$ ، که در آن $\text{card } \mathbf{R} = c$.

برهان. چون مجموعه \mathbf{R} و فاصله یک‌به‌یک $(0, 1)$ از اعداد حقیقی، یک عدد اصلی دارند، برای اثبات $cc \leq c$ ، کافی است نشان داده شود که یک انزکسیون از حاصلضرب دکارتی $(0, 1) \times (0, 1)$ به فاصله $(0, 1)$ وجود دارد. برای این منظور هر $x \in (0, 1)$ را با بسط اعشاری نامنتهای اش نشان می‌دهیم. مثلاً، عدد $1/2$ را با $0.4999\dots$ نشان می‌دهیم و نه با 0.5 . به این ترتیب هر عدد در $(0, 1)$ یک بسط یکتا دارد. اکنون به عهده

خواننده است تحقیق کند که تابع $f: (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ که با

$$f(0x_1x_2x_3\dots, 0y_1y_2y_3\dots) = 0x_1y_1x_2y_2\dots$$

تعریف می‌شود، انزکتیو است. پس برهان $cc \leq c$ کامل است. اثبات $cc \geq c$ به خواننده واگذار می‌شود.

تمرین ۵.۶

۱. قضیه ۵ را ثابت کنید.
۲. گیریم اعداد اصلی x, y, z و به قسمی هستند که $x \leq y$. ثابت کنید که $xz \leq yz$.
۳. گزاره زیر را ثابت یا رد کنید: اگر اعداد اصلی x, y, z و به قسمی باشند که $x < y$ و $z \neq 0$ ، آنگاه $xz < yz$.
۴. گیریم n يك عدد اصلی متاهی است. ثابت کنید که اگر $n \neq 0$ ، آنگاه $n\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}_0$.
۵. گیریم x و y اعداد اصلی هستند. ثابت کنید که (الف) اگر $xy = 0$ آنگاه $x = 0$ یا $y = 0$. (ب) اگر $xy = 1$ آنگاه $x = 1$ و $y = 1$.
۶. نشان دهید که تابع $f: (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ که در برهان مثال ۶ با

$$f(0x_1x_2x_3\dots, 0y_1y_2y_3\dots) = 0x_1y_1x_2y_2\dots$$

- تعریف شده است، سورژکتیو نیست.
۷. ثابت کنید که اگر x يك عدد اصلی و n يك عدد اصلی متاهی باشد، آنگاه

$$(n \text{ بار}) \quad nx = x + x + \dots + x$$
 ۸. گیریم x, y, z اعداد اصلی هستند. ثابت کنید که اگر $x = y$ آنگاه $xz = yz$.
 ۹. با آوردن مثال نقیض ثابت کنید که عکس مسئله ۸، مسئله قبل، درست نیست.

۶. توان اعداد اصلی

گیریم a و b اعداد اصلی متاهی یا ترامتاهی هستند. برای اینکه b^a (بخوانید: توان a از b) را به صورتی جامع تعریف کنیم، نخست حالت متاهی $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ ، و به طور کلی $n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$ (m بار) را بررسی می‌کنیم. می‌توانستیم این مفهوم را به کمک «حاصلضربهای دکارتی تعمیم یافته» به حالت ترامتاهی تعمیم دهیم، اما روشی وجود دارد که در آن به حاصلضربهای دکارتی تعمیم یافته نیازی نیست. گیریم A يك مجموعه m عنصری و B يك مجموعه n عنصری باشد چند تابع از A به B وجود دارد (به مسئله ۱۱، تمرین ۴.۳ رجوع کنید)؟ چون برای هر عنصر A ، می‌توان n نگاره انتخاب کرد و این انتخاب نگاره را می‌توان برای هر يك از m عنصر A ، مستقل از انتخاب نگاره‌ها برای دیگر عنصرهای A انجام داد، به جواب $n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^m$ می‌رسیم. این مفهوم به صورت زیر تعمیم می‌یابد.

توان اعداد اصلی ۱۴۳

تعریف ۴. گیریم a و b دو عدد اصلی با شرط $a \neq 0$ هستند. گیریم A و B مجموعه‌هایی هستند با اعداد اصلی $\text{card } A = a$ و $\text{card } B = b$. مجموعه تمام توابع از A به B را با B^A نشان می‌دهیم. تعریف می‌کنیم $b^a = \text{card } B^A$.

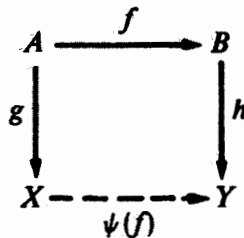
برای اینکه بتوانیم تعریف ۴ را بپذیریم، لازم است تحقیق کنیم که تعریف ۴ مستقل از مجموعه‌های انتخاب شده A و B است. قضیه زیر این نیاز را برآورده می‌کند.

قضیه ۶. گیریم مجموعه‌های A, B, X, Y به گونه‌ای باشند که $A \sim X, B \sim Y$. آنگاه $B^A \sim Y^X$.

برهان. گیریم $g: A \sim X$ و $h: B \sim Y$ بیژکیون هستند، آنگاه تابع

$$\psi: B^A \rightarrow Y^X$$

را با $\psi(f): X \rightarrow Y$ که در آن برای هر $f \in B^A$ ، $\psi(f)(x) = h \circ f \circ g^{-1}(x)$ ، تعریف می‌کنیم.



به خواننده واگذار می‌کنیم ثابت کند که تابع $\psi: B^A \rightarrow Y^X$ بیژکتیو است.

مثال ۷. گیریم A یک مجموعه است. اعداد اصلی $\text{card } \mathcal{P}(A)$ ، $2^{\text{card } A}$ را با هم مقایسه کنید.

حل. گیریم $B = \{0, 1\}$. به هر زیرمجموعه A مانند D ، تابع مشخصه $\chi_D: A \rightarrow B$ واکه در مثال ۸، فصل ۳ تعریف شد، نظیر می‌کنیم. تابع از $\mathcal{P}(A)$ به B^A که D را به χ_D می‌فرستد، بیژکتیو است (ثابت کنید). بنابراین مجموعه‌های $\mathcal{P}(A)$ و B^A یک عدد اصلی دارند؛ یعنی $\text{card } \mathcal{P}(A) = \text{card } B^A = 2^{\text{card } A}$.

قضیه ۷. گیریم a, x, y اعداد اصلی هستند. آنگاه $a^x a^y = a^{x+y}$.

برهان. گیریم مجموعه‌های A, X, Y به گونه‌ای هستند که $\text{card } A = a$ ، $\text{card } X = x$ ، $\text{card } Y = y$ ، و $X \cap Y = \emptyset$. آنگاه بنا بر تعریف ۲، $\text{card}(X \cup Y) = x + y$ برای تکمیل برهان، کافی است نشان داده شود که مجموعه‌های $A^{X \cup Y}$ و $A^X \times A^Y$ هم‌توان هستند. برای این منظور به هر جفت تابع (f, g) ، $f \in A^X$ و $g \in A^Y$ تابع $f \cup g \in A^{X \cup Y}$ را نظیر می‌کنیم [قضیه ۸، فصل ۳ را ببینید]. به عهده خواننده

است تحقیق کند که این تناظر يك همتوانی بین مجموعه‌های $A^{X \times X}$ و $A^{X \times Y}$ برقرار می‌کند. از این رو، $a^x a^y = a^{x+y}$.

قضیه ۸. گیریم x, y, z اعدادی اصلی هستند. آنگاه $(z^y)^x = z^{yx}$.

پروهان. گیریم X, Y, Z مجموعه‌هایی باشند که اعداد اصلی آنها به ترتیب x, y, z هستند. مطابق با تعریف ۴، قضیه ثابت می‌شود اگر نشان دهیم $(Z^Y)^X \sim Z^{Y \times X}$. قبل از نشان دادن این همتوانی، نخست به يك نماد قراردادی نیازمندیم: برای هر تابع مفروض $f: Y \times X \rightarrow Z$ و هر عنصر مفروض $a \in X$ ، يك تابع $f_a: Y \rightarrow Z$ وجود دارد که به ازای هر $b \in Y$ با $f_a(b) = f(b, a)$ تعریف می‌شود. به خواننده واگذار می‌کنیم نشان دهد که اگر تابع $f \in (Z^Y)^X$ به ازای هر $a \in X$ با $f_a(a) = f$ تعریف شود، آنگاه تابع $f \in (Z^Y)^X \rightarrow Z^{Y \times X}$ است؛ بلکه به هر $f \in Z^{Y \times X}$ تابع $f_a \in (Z^Y)^X$ را نظیر می‌کند، يك بیژ کسیون است.

یادآوری می‌شود که A -تصویر $p_A: A \times B \rightarrow A$ تابعی است که به هر جفت مرتب $(a, b) \in A \times B$ را نظیر می‌کند و B -تصویر $p_B: A \times B \rightarrow B$ نیز به طریق مشابه تعریف می‌شود [به مسئله ۸، تمرین ۵.۳ نگاه کنید].

قضیه ۹. گیریم a, b, x اعدادی اصلی هستند آنگاه $(ab)^x = a^x b^x$.

پروهان. گیریم اعداد اصلی مجموعه‌های A, B, X به ترتیب a, b, x هستند. تابع $(A \times B)^X \rightarrow A^X \times B^X$ ؛ بلکه هر $f: X \rightarrow A \times B$ را با تابع $(p_A \circ f, p_B \circ f)$ در $A^X \times B^X$ نظیر می‌کند، بیژ کسیون است (ثابت کنید). از این رو بنا بر تعریف ۴، $(ab)^x = a^x b^x$.

یادآوری می‌شود که اعداد اصلی مجموعه‌های \mathbb{N} و \mathbb{R} را به ترتیب با نمادهای \aleph_0 و c نشان می‌دهند و $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ (مثال ۵، فصل ۵ را ببینید) و $\mathbb{R} \sim (0, 1)$ (مثال ۳، فصل ۵ را ببینید). پس \aleph_0 عدد اصلی \mathbb{Q} و c عدد اصلی فاصله $(0, 1)$ است.

قضیه ۱۰. $c \cdot 10^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

پروهان. برای اثبات این قضیه نخست نشان می‌دهیم که $c \leq 2^{\aleph_0}$ و سپس به اثبات $2^{\aleph_0} \leq c$ می‌پردازیم. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ را که با

$$f(a) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\} \quad a \in \mathbb{R}$$

تعریف شده است در نظر بگیرید. این تابع انژکتیو است: اگر $a < b$ دو عدد حقیقی متمایز باشند، آنگاه يك عدد گویای r وجود دارد به گونه‌ای که $a < r < b$. آنگاه $r \in f(b)$ ولی $r \notin f(a)$ ، بنا بر این f انژکتیو است. حال از نتایج مسئله ۳، تمرین ۲.۶، و مثال ۷،

۱. زیرا اعداد گویا يك زیرمجموعه متراکم اعداد حقیقی هستند.

به دست می آید که

$$c \leq \text{card } \mathcal{P}(Q) = 2^{\aleph_0}$$

برای اثبات نامساوی در جهت دیگر، فرض کنید $\psi: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{R}$ تابعی باشد که با

$$\psi(f) = 0, f(1)f(2)f(3)\dots$$

که در آن $f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ، تعریف شده است. توجه کنید که $\psi(f)$ يك عدد اعشاری (متشکل از صفرها و یکها) است. اگر $f, g \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ و $f \neq g$ ، آنگاه $\psi(f) \neq \psi(g)$ زیرا رقمهای اعشاری $\psi(f)$ و $\psi(g)$ متمایز هستند*. بنا بر این $\psi: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{R}$ انژکتیو است، و بنا بر این $2^{\aleph_0} \leq c$.

نتیجه. $\aleph_0 < c$.

برهان. بنا بر قضیه کانتور (قضیه ۲) و نتیجه مثال ۷ داریم

$$\aleph_0 < \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\text{card } \mathbb{N}} = 2^{\aleph_0} = c$$

تمرین ۶.۹

۱. ثابت کنید که در برهان قضیه ۶، تابع $\psi: B^A \rightarrow Y^X$ بیژکتیو است.
 ۲. گیریم a يك عدد اصلی اختیاری است. ثابت کنید که $a^0 = 1, a^1 = a, a^n = 1$ و $a^0 = 0$ اگر $a \neq 0$.
 ۳. نشان دهید که برای هر عدد اصلی $a, a^x > a$.
 ۴. گیریم اعداد اصلی a, b, x, y به گونه ای هستند که $a \leq b$ و $x \leq y$ و $0 < x$. ثابت کنید که $a^x \leq b^y$.
 ۵. ثابت کنید که برای هر عدد منتهای $n \geq 2, n^{\aleph_0} = c = \aleph_0^{\aleph_0}$.
 ۶. ثابت کنید که برای هر عدد منتهای $n \geq 1, c^{\aleph_0} = c = c^n$.
 ۷. گیریم C مجموعه تمام اعداد مختلط است. ثابت کنید که $\text{card } C = c$.
 ۸. ثابت کنید که $\aleph_0 \cdot c = c$.
 ۹. ثابت کنید که تابع از $\mathcal{P}(A)$ به $\{0, 1\}^A$ که هر D در $\mathcal{P}(A)$ را به χ_D می برد، بیژکتیو است.
 ۱۰. مجموعه A دو مجموعه مجزای X و Y مفروض اند. ثابت کنید که تابع از $A^X \times A^Y$ به $A^{X \cup Y}$ که هر (f, g) در $A^X \times A^Y$ را به $f \cup g$ در $A^{X \cup Y}$ می برد، بیژکتیو است.
 ۱۱. ثابت کنید که در برهان قضیه ۸، تابع $\psi: Z^{Y \times X} \rightarrow (Z^Y)^X$ بیژکتیو است.
 ۱۲. ثابت کنید که در برهان قضیه ۹، تابع $\psi: (A \times B)^X \rightarrow A^X \times B^X$ بیژکتیو است.
- * چون $f \neq g$ حداقل يك $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $f(n) \neq g(n)$ که نتیجه می دهد $\psi(f) \neq \psi(g)$. منظور از جمله بالا همین است، نه اینکه الزاماً $f(1), f(2), \dots$ به ترتیب از $g(1), g(2), \dots$ متمایز هستند. -۴-

۷. چند مثال دیگر از حساب اعداد اصلی

در مثال ۶، مستقیماً ثابت کردیم که $cc = c$. حال با استفاده از قضیه ۱۰، که حکم می‌کند $c^{2^{n_0}} = c$ ، يك برهان کوتاه‌تر ارائه می‌دهیم.

مثال ۸. با استفاده از قضیه ۱۰ ثابت کنید که $cc = c$ [مثال ۶ را ببینید].
 بوهان. از قضیه ۷ و ۱۰ و مثال ۳، $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ ، نتیجه می‌شود که

$$cc = 2^{\aleph_0} 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$$

مثال ۹. عدد اصلی $\{f|f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}\}$ ، مجموعه تمام توابع \mathbf{R} به \mathbf{R} ، را با عدد اصلی \mathbf{R} ، یعنی c ، مقایسه کنید.

حل: داریم

	$\text{card}\{f f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}\} = c^c$
تعریف ۴	$= (2^{\aleph_0})^c$
قضیه ۱۰	$= 2^{\aleph_0^c}$
قضیه ۸	$= 2^c$
مسئله ۸، تمرین ۶.۶	$> c$
مثال ۷، قضیه ۲	

بنابراین، $\text{card}\{f|f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}\} > \text{card } \mathbf{R}$.

مثال ۱۰. گیریم $C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ و $C(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$ مجموعه‌های تمام توابع حقیقی پیوسته با حوزه \mathbf{R} و با حوزه \mathbf{Q} هستند. گیریم $K(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ مجموعه تمام توابع حقیقی ثابت با حوزه \mathbf{R} است. ثابت کنید که

$$\text{card } C(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \text{card } C(\mathbf{Q}, \mathbf{R}) = \text{card } K(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = c$$

برهان. به هر تابع $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ، تابع $f|_{\mathbf{Q}}: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$ که با $(f|_{\mathbf{Q}})(x) = f(x)$ برای هر $x \in \mathbf{Q}$ تعریف می‌شود، نظیر می‌شود. تابع $f|_{\mathbf{Q}}$ محدود f به \mathbf{Q} نامیده می‌شود. از این‌رو، تابع طبیعی*

$$\psi: C(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow C(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$$

۱. اگر معلم مایل باشد، می‌تواند برهان را حذف کند.
 * هر تابع از (\mathbf{R}, \mathbf{R}) به (\mathbf{Q}, \mathbf{R}) به هر عنصر $C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ يك عنصر $C(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$ را نظیر می‌کند؛
 * ساده‌ترین تابع از $C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ به $C(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$ است و طبیعی است که $f|_{\mathbf{Q}}$ را نظیر f بگیریم،
 از این‌رو مؤلف ψ را تابع طبیعی می‌نامد. م.

چند مثال دیگر از حساب اعداد اصلی ۱۴۷

وجود دارد که هر تابع $f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ را به $f|_{\mathbf{Q}}$ ، تحدید f روی \mathbf{Q} ، نظیر می‌کند. بدیهی است که تحدید تابع پیوسته، پیوسته است. بنا بر این $\psi: C(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow C(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$ یک تابع خوش‌تعریف است*.

از اینکه اعداد گویا در اعداد حقیقی متراکم است؛ نتیجه می‌شود که برای هر عدد حقیقی x یک دنبالهٔ اعداد گویا، مانند $\{x_n | n \in \mathbf{N}\}$ وجود دارد به‌قسمی که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

در نتیجه، اگر دو تابع پیوسته $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ این ویژگی را داشته باشند که برای هر $x' \in \mathbf{Q}$ ، $f(x') = g(x')$ ، آنگاه برای هر $x \in \mathbf{R}$ ، $f(x) = g(x)$. به عبارت دیگر، تابع $\psi: C(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow C(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$ انزکتیو است. پس، بنا بر قضیه‌های ۸ و ۱۰ داریم

$$\text{card } C(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \leq \text{card } C(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$$

$$\leq \text{card } \mathbf{R}^{\mathbf{Q}}$$

$$= c^{\aleph_0}$$

$$= (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}$$

$$= 2^{(\aleph_0 \aleph_0)}$$

$$= 2^{\aleph_0}$$

$$= c$$

حال، $K(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ ، مجموعهٔ تمام توابع حقیقی ثابت باحوزهٔ \mathbf{R} ، را در نظر بگیرید. چون برای هر عدد حقیقی a ، یک تابع ثابت $f_a: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ که با $f_a(\mathbf{R}) = \{a\}$ تعریف می‌شود، وجود دارد، داریم

$$\text{card } K(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = c$$

چون هر تابع ثابت $f_a: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ پیوسته است، داریم $K(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \subset C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ بنا بر این

$$c = \text{card } K(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \leq \text{card } C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$$

که اگر با نامساوی آخر که در پاراگراف قبلی به‌دست آمد ترکیب شود، نتیجه می‌دهد

$$c = \text{card } K(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \leq \text{card } C(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \leq \text{card } C(\mathbf{Q}, \mathbf{R}) \leq c$$

* برای اینکه تعریف ψ با معنی باشد، یا به‌عبارت دیگر ψ خوش‌تعریف باشد، لازم است که $f|_{\mathbf{Q}} \in C(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$ ، یعنی $f|_{\mathbf{Q}}$ پیوسته باشد. م.

به این ترتیب برهان اینکه $\text{card } C(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ ، $\text{card } C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ، و $\text{card } K(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ مساوی با c هستند، کامل است.

از مثال ۱۰ نتیجه می‌شود که تابعهای ثابت به «زیادی» تابعهای پیوسته هستند. این يك نشانه دیگر از ویژگیهای جالب مجموعه‌های نامتناهی است.

مثال ۱۱. عدد اصلی $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ، مجموعه تمام تابعهای حقیقی مشتقپذیر از يك متغیر حقیقی را بیابید.

حل: چون هر تابع ثابت، مشتقپذیر است و هر تابع مشتقپذیر پیوسته است، داریم

$$K(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

بنابراین مثال ۱۰، داریم

$$c = \text{card } K(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \leq \text{card } D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \leq \text{card } C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = c$$

بنابراین، $\text{card } D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = c$.

تمرین ۷.۶

۱. نشان دهید که در فضای n -بعدی $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (با n عامل ضرب) «همان اندازه» نقطه است که در فاصله باز یک $(0, 1)$.

۲. فضای هیلبرت کلاسیک از تمام دنباله‌های نامتناهی اعداد حقیقی (x_1, x_2, x_3, \dots) ، به نام نقطه، که در آن سری $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots$ همگرا است، تشکیل شده است. نشان دهید که تعداد نقاط فضای هیلبرت کلاسیک «به اندازه» نقطه‌های خط حقیقی \mathbb{R} است.

۳. \mathbb{R}^0 ، مجموعه تمام دنباله‌های نامتناهی اعداد حقیقی (x_1, x_2, x_3, \dots) ، که نقطه‌های فضای \mathbb{R}^{\aleph_0} نامیده می‌شوند، مفروض است. يك نقطه مشبکه‌ای در \mathbb{R}^{\aleph_0} ، نقطه (x_1, x_2, x_3, \dots) است که در آن تمام x_i ها عدد صحیح هستند. نشان دهید که تعداد نقاط فضای \mathbb{R}^{\aleph_0} «به اندازه» تعداد تمام نقاط مشبکه‌ای در \mathbb{R}^{\aleph_0} است.

۴. نشان دهید که تعداد توابع يك متغیره حقیقی که فقط مقادیر ۰ و ۱ را اختیار می‌کنند «به اندازه» تعداد تمام توابع حقیقی n متغیره حقیقی است؛ n يك عدد طبیعی است.

۵. گیریم عدد اصلی $\{f|f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ ، مجموعه تمام توابع يك متغیره با f نشان داده شده است. نشان دهید که برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$f^n = f^{\aleph_0} = f^c = f.$$

۸. فرضیه پیوستار و تعمیم آن

چون هر مجموعه نامتناهی شامل يك زیرمجموعه شمارای نامتناهی است (قضیه ۱۱، فصل ۵)،

فرضیه پیوستار و تعمیم آن ۱۴۹

عدد اصلی \aleph_0 کوچکترین عدد اصلی ترامتناهی است. در حدود سال ۱۸۸۵ کانتور سؤال مهمی که به مسئله پیوستار مشهور است، مطرح کرد: آیا عددی اصلی بین \aleph_0 و 2^{\aleph_0} وجود دارد؟ به زبان مجموعه‌ها، آیا هیچ زیرمجموعه نامتناهی ناشمارای \mathbb{R} وجود دارد که عدد اصلی اش از عدد اصلی \mathbb{R} کوچکتر باشد؟ کوشش کانتور و بسیاری دیگر از ریاضیدانان برجسته آن زمان در حل این مسئله به نتیجه نرسید. چون در هیچ جای ریاضیات کلاسیک به چنین مجموعه‌ای برخورد شده بود و به نظر می‌رسید راهی برای پیدا کردن آن وجود ندارد، کانتور و دیگران معتقد شدند که جواب مسئله پیوستار بسايد منفی باشد. این اعتقاد به عنوان فرضیه پیوستار مشهور شده است.

فرضیه پیوستار. عدد اصلی مانند x که در $\aleph_0 < x < 2^{\aleph_0}$ صدق کند، وجود ندارد.

پرسشی که در زیر می‌آید بسیار به مسئله پیوستار نزدیک است و معمولاً آن را مسئله پیوستار تعمیم یافته می‌نامند: آیا عددی اصلی وجود دارد که بین دو عدد اصلی ترامتناهی a و 2^a واقع باشد؟ به این سؤال نیز جواب داده نشده است. این اعتقاد که چنین عددی اصلی وجود ندارد فرضیه پیوستار تعمیم یافته نامیده می‌شود.

فرضیه پیوستار تعمیم یافته. عدد اصلی ترامتناهی a هر چه باشد، عددی اصلی مانند x وجود ندارد به گونه‌ای که $a < x < 2^a$.

دبری ناپید که در سال ۱۹۰۵، در کنفرانس بین‌المللی ریاضیدانان در پاریس، ریاضیدان بزرگ آلمانی داوید هیلبرت^۱ (۱۸۶۲-۱۹۴۳) فهرستی از ۲۳ مسئله مهم ریاضی حل نشده را عرضه کرد، که اولین آنها مسئله پیوستار بود. هیچ پیشرفتی در حل این مسئله حاصل نشد تا اینکه در سال ۱۹۳۸ کورت گودل^۲ (۱۹۰۶-۱۹۷۸) منطق‌دان برجسته قرن، ثابت

۱. ریاضیدان برجسته هم‌اواخر، داوید هیلبرت (David Hilbert, 1862-1943)، استاد ریاضیات دانشگاه گوتینگن آلمان (۱۸۹۵-۱۹۴۳) بود. او بر تمام دنیای ریاضیات جدید، از جبر قرن نوزدهم تا منطق جدید و فیزیک ریاضی، تأثیر گذاشت. فضای مشهور هیلبرت از جمله کارهای تحقیقاتی فراوان اوست. هیلبرت بر این عقیده بود که تمام ایده‌های ریاضی به‌طور هماهنگ با یکدیگر سازگارند.

۲. کورت گودل (Kurt Gödel, 1906-1978) از انستیتوی مطالعات عالی پرنستون در نیوجرسی، در چکوسلواکی متولد شد. نخست در ۲۵ سالگی شهرت جهانی یافت. محققان برجسته‌ای چون برتراند راسل (۱۸۷۲-۱۹۷۰) و آلفرد نورث ایتهد (۱۸۶۱-۱۹۴۷) به نظرشان رسیده بود که راهنمایی مطلق برای درستی یا نادرستی گزاره‌های معین ریاضی وجود دارد. گودل با اثبات اینکه آنچه راسل و ایتهد جستجو می‌کنند وجود ندارد، جهان را تکان داد. از جمله کارهای عمده دیگر او اثبات تمامیت منطق تسویر و اثبات سازگار بودن فرض پیوستار تعمیم یافته و اصل انتخاب است.

کرد که اگر فرض پیوستار تعمیم یافته به اصول موضوع رایج نظریه مجموعه‌ها افزوده شود، آنگاه هر تناقضی که امکان داشته باشد به وسیله این دستگاه اصول موضوعی به دست آید، ممکن است به صورت تناقضی بیان شود که از اصول موضوع قبلی (بدون اینکه فرض پیوستار تعمیم یافته به آنها اضافه شده باشد) نتیجه می‌شود. به عبارت دیگر، فرض پیوستار تعمیم یافته نسبت به اصول موضوع نظریه مجموعه‌ها سازگار است.

بالاخره، در ۱۹۶۳، ریاضیدان جوان پل کوهن* (۱۹۳۴ -) از دانشگاه استانفورد کشف مهمی کرد. او نشان داد که فرض پیوستار تعمیم یافته به وسیله اصول موضوع متعارفی نظریه مجموعه‌ها اثبات شدنی نیست. بنابراین، وضع فرض پیوستار تعمیم یافته در نظریه مجموعه‌ها، همانند اصل موضوع تساوی اقلیدس (اصل پنجم) در هندسه است. می‌توانیم آنها را بپذیریم یا رد کنیم و در هر حالت یک تئوری سازگار ریاضی به دست آوریم.

۱. کتاب زیر را ببینید

K. Gödel, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of set Theory*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1940, 66 pp. Rev. ed., 1951, 74 pp.

* Paul J. Cohen



اصل انتخاب و برخی از صورت‌های هم‌ارز آن

اصل انتخاب و سه اصل هم‌ارز دیگر آن که کاربردهای فراوانی دارند شامل ماکسیمال هاوزدورف*، لم‌تسورن** و اصل خوشترتیبی زرملو*** – را معرفی کرده‌ایم. در یک دور زنجیره‌ای از استنتاجها ثابت کرده‌ایم که اصل انتخاب و این سه اصل ریاضی مهم منطقاً هم‌ارز هستند. اصل استقرای ترامتناهی همراه با شرحی از چگونگی کاربرد این استقرا در برهانهای ریاضی را آورده‌ایم. با یک مبحث کوتاه تاریخی در باره اصل انتخاب، فصل را به پایان برده‌ایم.

۱. مقدمه

فرض کنید که شما وارد یک مغازه میوه فروشی شده‌اید که تعدادی سبد (غیر تهی) میوه دارد. اگر از شما بخواهند که از هر سبد یک میوه (و فقط یکی) انتخاب کنید، برای شما کار مشکلی نیست. اما سؤال مشابه زیر، که در نگاه اول ممکن است بدیهی به نظر برسد، در حقیقت پیچیده است:

* Hausdorff maximality principle

** Zorn's lemma

*** well-ordering principle of Zermelo

يك مجموعه غير تهی S که عناصرش مجموعه‌های غير تهی مجزای S هستند داده شده است، آیا مجموعه‌ای مانند R وجود دارد که عنصرهایش تشکیل شده باشند از يك x_α از هر S_α ؟

مشکل اصلی وقتی پیش می‌آید که S نامتناهی باشد. کوششهای ارنست تسرملو (۱۸۷۱-۱۹۵۳)، و دیگران در اوایل قرن بیستم برای پاسخ به این سؤال به نتیجه نرسید. تسرملو احساس کرد که این سؤال احتمالاً حل شدنی نیست و تنها راه‌هایی از مشکل، مسلم دانستن اصل موضوعی است که از آن زمان به اصل انتخاب معروف شده است. این اصل را به صورت کلی‌اش برحسب تابعها، بیان می‌کنیم:

اصل انتخاب. برای هر مجموعه غير تهی S که عنصرهایش مجموعه‌های غير تهی هستند، يك تابع $f: S \rightarrow \bigcup_{A \in S} A$ به نام تابع انتخاب وجود دارد به گونه‌ای که برای هر $A \in S$ ، $f(A) \in A$.

استفاده از اصل انتخاب اکنون برای اثبات بسیاری از نتایج مهم در شاخه‌های گوناگون ریاضیات ضروری است. در حقیقت، در اثبات قضیه ۱۱ فصل ۵، اصل انتخاب به صورتی پنهانی به کار رفته است.

پس از آن ریاضیدانان چند اصل دیگر کشف کردند که اغلب می‌توان آنها را به جای اصل انتخاب به کار برد. این اصول، اگرچه به ظاهر هیچ شباهتی به اصل انتخاب ندارند، اما به زودی اثبات شده که با اصل انتخاب هم‌ارز هستند. برای درک بعضی از این اصول و ارتباط آنها با اصل انتخاب، به چند تعریف نیازمندیم:

تعریف ۰۱. رابطه \leq روی مجموعه A ، رابطه ترتیبی جزئی گفته می‌شود اگر و تنها اگر رابطه \leq روی A انعکاسی و متعدی و پسادمتقارن (یعنی اگر $a \leq b$ و $b \leq a$ آنگاه $a = b$) باشد. يك مجموعه جزئاً مرتب، جفت (A, \leq) است که در آن A يك مجموعه \leq يك رابطه ترتیبی جزئی روی A است.

تعریف ۰۲. رابطه ترتیبی کلی \leq روی مجموعه A يك رابطه ترتیبی جزئی است به گونه‌ای که برای هر دو عنصر a و b در A ، یا $a \leq b$ یا $b \leq a$. يك مجموعه کلاً مرتب يك جفت (A, \leq) است که در آن A يك مجموعه و \leq يك رابطه ترتیبی کلی است.

هنگامی که از روی متن، رابطه ترتیبی جزئی (کلی) \leq روی A روشن باشد و سؤال تفاهم امکان نداشته باشد، می‌توانیم به طور خلاصه بگوییم که A يك مجموعه جزئاً (کلاً) مرتب است. رابطه‌های ترتیب کلی و مجموعه‌های کلاً مرتب، رابطه‌های ترتیبی خطی و مجموعه‌های مرتب خطی نیز نامیده می‌شوند. از تعریفها کاملاً هویداست که يك مجموعه کلاً مرتب، يك مجموعه جزئاً مرتب است، در حالی که يك مجموعه جزئاً مرتب الزماً يك مجموعه کلاً مرتب نیست (مثال ۲، در زیر را ببینید). گیریم B زیر مجموعه‌ای از مجموعه جزئاً مرتب (A, \mathcal{R}) باشد و \leq_B اشتراك \mathcal{R} با $B \times B$ ، یعنی $\mathcal{R} \cap (B \times B)$ باشد. آنگاه

(B, \leq_B) يك مجموعه جزئاً مرتب است؛ ممکن است که \leq_B يك رابطه کلاً مرتب روی B باشد، در این حالت B زیرمجموعه کلاً مرتب مجموعه جزئاً مرتب (A, \leq) گفته می شود. زیرمجموعه کلاً مرتب يك مجموعه جزئاً مرتب را از زنجیر نیز می نامند.

جمله « (A, \leq) يك مجموعه جزئاً (کلاً) مرتب است» را می توانیم با جمله هم ارز زیر بیان کنیم: مجموعه A با رابطه \leq جزئاً (کلاً) مرتب شده است. به هر حال به جای $b \leq a$ می توانیم بنویسیم $a \geq b$ و به جای $a \leq b$ و $a \neq b$ می نویسیم $a < b$ یا $b > a$.

مثال ۱. گیریم X يك مجموعه غیر تهی است. $\mathcal{P}(X)$ ، مجموعه توانی X ، با رابطه شمول \subseteq روی $\mathcal{P}(X)$ جزئاً مرتب است.

مثال ۲. گیریم \leq' رابطه ای است که روی \mathbb{R}^2 با $(b_1, b_2) \leq' (a_1, a_2)$ اگر و تنها اگر $a_1 \leq b_1$ و $a_2 \leq b_2$ تعریف شده باشد. خواننده باید تحقیق کند که رابطه \leq' يك رابطه ترتیبی جزئی روی \mathbb{R}^2 است. چون نه $(2, 1) \leq' (1, 2)$ و نه $(1, 2) \leq' (2, 1)$ ، رابطه \leq' يك رابطه کلاً مرتب روی \mathbb{R}^2 نیست.

مثال ۳. در مثال ۲، قطر $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$ در صفحه \mathbb{R}^2 ، يك زنجیر است.

تمرین ۱۰۷

۱. گیریم \mathcal{P} يك افزاز مجموعه غیر تهی X است. ثابت کنید که يك مجموعه $R \subseteq X$ وجود دارد به قسمی که برای هر $C \in \mathcal{P}$ ، $C \cap R$ از يك و فقط يك عنصر تشکیل شده است؛ مجموعه R مجموعه نماینده های \mathcal{P} نامیده می شود.

۲. گیریم $f: A \rightarrow B$ يك سورژکسیون است، ثابت کنید که يك زیرمجموعه A مانند C وجود دارد به گونه ای که C هم توان B است و از این رو $\text{card } A \geq \text{card } B$.

۳. گزاره مثال ۱ را ثابت کنید.

۴. نشان دهید که

(الف) رابطه همانی « $=$ » روی مجموعه، يك رابطه ترتیبی جزئی است.

(ب) رابطه معمولی « \leq » روی مجموعه اعداد حقیقی، يك رابطه ترتیبی کلی است.

۵. گیریم F مجموعه تمام توابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ است و فرض کنیم

$$\mathcal{R} = \{(f, g) \in F \times F \mid f(x) \leq g(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$$

ثابت کنید (F, \mathcal{R}) يك مجموعه جزئاً مرتب است.

۶. ثابت کنید که مجموعه اعداد طبیعی \mathbb{N} همراه با رابطه « x, y را بخش می کند» يك مجموعه جزئاً مرتب است.

۷. گیریم « \leq' » (\mathbb{R}^2, \leq') مجموعه جزئاً مرتب مثال ۲، و m يك عدد حقیقی نامنفی است.

ثابت کنید که زیرمجموعه « \leq' » (\mathbb{R}^2, \leq') که با $\{(x, mx) \mid x \in \mathbb{R}\}$ مشخص می شود،

يك زنجیر است.

۸. گیریم $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های غیرتهی است، یعنی، هر $A_\gamma \neq \emptyset$. آنگاه $P_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ ، حاصلضرب دکارتی تعمیم‌یافته خانواده $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ ، بنا بر تعریف، مجموعه تمام تسوابع $f: \Gamma \rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ است که در آن برای هر $\gamma \in \Gamma$ ، $f(\gamma) \in A_\gamma$ ثابت کنید که اگر $\Gamma \neq \emptyset$ ، آنگاه $P_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ تهی نیست.
۹. نماد مسئله ۸ را به کار برید و ثابت کنید که اگر Γ متناهی، $\Gamma = \{1, 2, \dots, n\}$ باشد، آنگاه یک تناظر یک به یک بین $P_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ و مجموعه n -گانه‌های زیر وجود دارد:
 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) | i \in \Gamma \text{ هر } x_i \in A_i\}$.
۱۰. گیریم A و B مجموعه‌های غیرتهی، \mathcal{R} یک رابطه از A به B است و $\text{Dom } \mathcal{R} = A$. ثابت کنید که یک تابع $f: A \rightarrow B$ وجود دارد به قسمی که $f \subseteq \mathcal{R}$.
۱۱. ثابت کنید که تابع $f: A \rightarrow B$ سورژکتیو است اگر و تنها اگر یک تابع $g: B \rightarrow A$ وجود داشته باشد به قسمی که $f \circ g = I_B$ ، که در آن I_B تابع همانی روی B است [رجوع کنید به قضیه ۱۶ فصل ۳].

۲. اصل ماکسیمال هاوسدورف

درجبر نوین و توپولوژی، اغلب مناسبتر است از اصل هاوسدورف که با اصل انتخاب هم‌ارز است، استفاده کنیم. برای درک این اصل، به چند تعریف جدید نیاز داریم.

- تعریف ۳. گیریم (A, \leq) یک مجموعه جزئاً مرتب است.
 (الف) عنصر $u \in A$ را کران بالای B ، یک زیرمجموعه A ، می‌گویند اگر فقط اگر برای هر $b \in B$ ، $u \geq b$.
 (ب) u_0 ، کران بالای B ، کوچکترین کران بالای B است اگر و تنها اگر برای هر کران بالای B مانند u ، $u_0 \leq u$.
 (ج) عنصر $e \in A$ را ماکسیمال می‌گویند اگر و تنها اگر برای هر $a \in A$ ، $e \leq a$ نتیجه شود که $e = a$.

تعریف ۳' را که نظیر تعریف ۳ است، جداگانه بیان می‌کنیم.

- تعریف ۳'. گیریم (A, \leq) یک مجموعه جزئاً مرتب است.
 (الف) عنصر $v \in A$ کران پایین B ، یک زیرمجموعه A است اگر و تنها اگر برای هر $b \in B$ ، $v \leq b$.
 (ب) v_0 کران پایین B ، بزرگترین کران پایین B است اگر و تنها اگر برای هر v ، کران پایین B ، $v_0 \geq v$.
 (ج) عنصر $e' \in A$ مینیمال است اگر و تنها اگر برای هر $a \in A$ از $a \leq e'$ نتیجه شود $e' = a$.

مثال ۴. گیریم X یک مجموعه غیرتهی و \mathcal{B} یک زیرمجموعه مجموعه جزئاً مرتب

$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ است [مثال ۱ را ببینید]. آنگاه کوچکترین کران بالای $\mathcal{B}, \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ و بزرگترین کران پایین $\mathcal{B}, \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ است.

قضیه زیر نقش مهمی در اثبات هم‌ارزی اصل انتخاب با اصلهای دیگر ایفا می‌کند. اثبات این قضیه خسته‌کننده است و شاید هم یأس‌آور باشد؛ لذا نویسندگان کتاب پیشنهاد می‌کنند در بار اول که مبتدیان کتاب را می‌خوانند، این قضیه را بدون برهان بپذیرند.

قضیه ۱. گیریم مجموعه جزئاً مرتب غیرتهی (A, \leq) چنان است که هر زیرمجموعه کلاً مرتب A يك کوچکترین کران بالا در A دارد. اگر $f: A \rightarrow A$ به قسمی باشد که برای هر $a \in A, f(a) \geq a$ ، آنگاه يك $p \in A$ وجود دارد به قسمی که $f(p) = p$.

برهان. گیریم a يك عنصر اختیاری A است که در طول برهان ثابت خواهد ماند. B زیرمجموعه A پذیرفتنی گفته می‌شود اگر و تنها اگر دارای سه ویژگی زیر باشد.

$$a \in B \text{ (يك)}$$

$$f(B) \subseteq B \text{ (دو)}$$

(سه) کوچکترین کران بالای هر زیرمجموعه کلاً مرتب و غیرتهی B ، متعلق به B است. گیریم \mathcal{B} مجموعه تمام زیرمجموعه‌های پذیرفتنی A باشد. آنگاه چون مجموعه پذیرفتنی است، $\mathcal{B} \neq \emptyset$. اشتراك مجموعه‌های پذیرفتنی، پذیرفتنی است؛ از این رو مجموعه جزئاً مرتب (\mathcal{B}, \subseteq) يك عنصر مینیمال یکتا، $B_0 = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ ، دارد. چون مجموعه $\{x \in A \mid x \geq a\}$ آشکارا پذیرفتنی است، داریم $B_0 \subseteq \{x \in A \mid x \geq a\}$. بنا بر این (چهار) برای هر $x \in B_0, x \geq a$.

C را مجموعه $C = \{x \in B_0 \mid \exists y \in B_0, y < x \Rightarrow f(y) \leq x\}$ بگیریم. ثابت می‌کنیم که

$$z \in B_0 \text{ و } x \in C \text{ (پنج) نتیجه می‌دهد یا } z \leq x \text{ یا } z \geq f(x)$$

$x \in C$ را ثابت اختیار کنید، و بنویسید $D = \{z \in B_0 \mid z \leq x \text{ یا } z \geq f(x)\}$. آنگاه شرط (چهار) نشان می‌دهد که D در (يك) صدق می‌کند. مجموعه D در (دو) نیز صدق می‌کند؛ زیرا اگر $z \geq f(x)$ ، آنگاه $f(z) \geq z \geq f(x)$ و اگر $z = x$ ، آنگاه $f(z) = f(x)$ ؛ و اگر $z < x$ ، آنگاه چون $x \in C$ ، داریم $f(z) \leq x$. مجموعه D همچنین در (سه) صدق می‌کند: اگر E زیرمجموعه غیرتهی و کلاً مرتب D و کوچکترین کران بالای E باشد، آنگاه یا برای هر $y \in E, y \leq x$ و در نتیجه $u \leq x$ ، یا برای يك $y \in E, y \geq f(x)$ و در نتیجه $u \geq f(x)$. بنا بر این D پذیرفتنی است، پس $D = B_0$ ، و به این ترتیب (پنج) ثابت می‌شود.

حال ثابت می‌کنیم که C پذیرفتنی است. مجموعه C در (يك) صدق می‌کند، زیرا $a \in B_0$ و در B_0 عنصر کوچکتر از a وجود ندارد. نشان دهیم که C در (دو) صدق می‌کند، ثابت می‌کنیم که اگر $x \in C, y \in B_0$ ، و $y < f(x)$ ، آنگاه $f(y) \leq f(x)$. بنا بر (پنج)، داریم یا $y \geq f(x)$ یا $y \leq x$ ؛ بنا بر این اگر $y < f(x)$ آنگاه $y \leq x$ و چون $x \in C$

$y < x$ نتیجه می‌دهد $(f(x) \leq x) \Rightarrow (f(y) \leq x)$. اگر $y = x$ آنگاه $f(y) = f(x)$. برای اینکه ثابت کنیم C در (سه) صدق می‌کند، w را کوچکترین کران بالای مجموعه غیرتهی و کلاً مرتب $G \subseteq C$ می‌گیریم. برای بررسی اینکه $w \in C$ ، فرض کنید $y \in B_0$ و $y < w$. بنا بر (پنج) می‌دانیم که هر $x \in G$ این ویژگی را دارد که یا $y \leq x$ یا $y > f(x)$. نامساوی $y > f(x) \geq x$ برای هر $x \in G$ درست نیست، زیرا اگر چنین باشد $w \geq y$ نتیجه می‌شود، و این با طرز انتخاب y تناقض دارد. پس یک $x \in G$ وجود دارد به‌قسمی که $y \leq x$. اگر $y < x$ آنگاه بنا بر تعریف C ، $f(y) \leq x \leq w$. اگر $y = x$ ، آنگاه چون $y < w$ ، یک $z \in G$ وجود دارد به‌قسمی که $y < z$. از این‌رو، بنا بر تعریف C ، $f(y) \leq z \leq w$. پس $f(y) \leq w$ و در نتیجه $w \in C$. حال چون مجموعه C یک زیرمجموعه پذیرفتنی B_0 است، الزاماً داریم $C = B_0$. در نتیجه بنا بر (پنج)، B_0 کلاً مرتب است. کوچکترین کران بالای B_0 را p می‌نامیم؛ آنگاه $p \in B_0$ و $p \leq f(p) \leq p$.

حال می‌توانیم اصل ماکسیمال هاوزدورف را با استفاده از اصل انتخاب ثابت کنیم.

قضیه ۲. (اصل ماکسیمال هاوزدورف). فرض می‌کنیم \mathcal{J} ، مجموعه تمام زیرمجموعه‌های کلاً مرتب یک مجموعه جزئاً مرتب (A, \leq) باشد شمول \subseteq ، جزئاً مرتب شده است. آنگاه (\mathcal{J}, \subseteq) عنصر ماکسیمال دارد.

پوهان. برخلاف حکم فرض کنید که \mathcal{J} عنصر ماکسیمال ندارد. آنگاه به هر $T \in \mathcal{J}$ یک مجموعه غیرتهی

$$T^* = \{S \in \mathcal{J} \mid S \supset T\}$$

نظیر می‌شود. بنا بر اصل انتخاب، یک تابع g با حوزه $\{T^* \mid T \in \mathcal{J}\}$ وجود دارد که در $g(T^*) \in T^*$ صدق می‌کند. در نتیجه، برای هر $T \in \mathcal{J}$ یک تابع $f: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ که با $f(T) = g(T^*) \supset T$ تعریف می‌شود وجود دارد. با استفاده از مثال ۴، می‌بینیم که (\mathcal{J}, \subseteq) همراه با تابع f در فرض قضیه ۱ صدق می‌کنند. اما برای هر $T \in \mathcal{J}$ ، $f(T) \supset T$ که یک تناقض است. پس قضیه ثابت شده است.

تمرین ۲۰۷

۱. گیریم B زیرمجموعه‌ای از مجموعه جزئاً مرتب (A, \leq) است. ثابت کنید که کوچکترین کران بالای (بزرگترین کران پایین) B در صورت وجود، یکتاست.
۲. مثالی بیاورید از زیرمجموعه کراندار مجموعه جزئاً مرتب که نه کوچکترین کران بالا داشته باشد نه بزرگترین کران پایین.
۳. گیریم $X = \{a, b, c\}$ ، فرض کنیم مجموعه توانی $\mathcal{P}(X)$ با رابطه شمول \subseteq جزئاً مرتب شده است. تمام کرانهای بالا، تمام کرانهای پایین، کوچکترین کران بالا و بزرگترین

کران پایین مجموعه $\{\{a, b\}, \{c, a\}\}$ را بیابید.

۴. حکم مثال ۴ را ثابت کنید.
۵. در مسئله ۳، عناصر ماکسیمال و مینیمال $\mathcal{P}(X)$ را بیابید.
۶. عناصر ماکسیمال و مینیمال مجموعه جزئاً مرتب $\mathcal{P}(X)$ در مثال ۴ را بیابید.
۷. مثالی از مجموعه جزئاً مرتب بیاورید که بیش از يك عنصر ماکسیمال و نیز بیش از يك عنصر مینیمال داشته باشد.
۸. ثابت کنید که اگر مجموعه کلاً مرتب عنصر ماکسیمال (مینیمال) داشته باشد، آنگاه تنها يك عنصر ماکسیمال (مینیمال) دارد.
۹. مثالی از مجموعه کلاً مرتب بیاورید که نه عنصر ماکسیمال داشته باشد نه عنصر مینیمال.
۱۰. گیریم (\mathcal{J}, \subseteq) نمادی است که در قضیه ۲ آمده است و \mathcal{J}_0 يك زیرمجموعه کلاً مرتب \mathcal{J} است. ثابت کنید که {برای هر $S \in \mathcal{J}_0$ ، $T \in \mathcal{J} | T \supseteq S$ } $T_0 = \bigcap$ کوچکترین کران بالای \mathcal{J}_0 است.
۱۱. مطلب زیر را ثابت کنید. گیریم (A, \leq) يك مجموعه جزئاً مرتب غیر تهی است به قسمی که هر زیرمجموعه کلاً مرتب A بزرگترین کران پایین دارد. اگر $f: A \rightarrow A$ به گونه ای باشد که برای هر $a \in A$ ، $f(a) \leq a$ ، آنگاه $q \in A$ وجود دارد به قسمی که $f(q) = q$ [راهنمایی: از قضیه ۱ استفاده کنید].
۱۲. گیریم (A, \leq) يك مجموعه جزئاً مرتب و B يك زیرمجموعه کلاً مرتب A است. ثابت کنید که A يك زیرمجموعه کلاً مرتب ماکسیمال، مانند C ، دارد به قسمی که $B \subseteq C$. [راهنمایی: قضیه ۲ را به کار برید].
۱۳. گیریم (A, \leq) يك مجموعه جزئاً مرتب است. B ، زیرمجموعه A ، پاد زنجیر گفته می شود اگر و تنها اگر برای هر دو عنصر متمایز x و y در B ، $y \leq x$ و $x \leq y$ هیچ يك برقرار نباشد. ثابت کنید که هر پاد زنجیر، زیرمجموعه پاد زنجیری است که نسبت به رابطه شمول \subseteq ، ماکسیمال است [راهنمایی: قضیه ۲ را به کار برید].

۳. لم تسورن

شاید یکی از صورتهای هم ارز اصل موضوع انتخاب که بیش از دیگر صورتهای به کار می رود، لم تسورن باشد که اولین بار در سال ۱۹۱۴ عنوان شد. اصطلاح لم تسورن که معمولاً به کار می برند کم و بیش گمراه کننده است، شاید مناسبتر باشد بگوییم «اصل تسورن».

در قضیه ۲، در واقع ثابت کرده ایم که اصل ماکسیمال هاوسدورف از اصل انتخاب نتیجه می شود. در برهان قضیه بعدی، نشان خواهیم داد که لم تسورن از اصل ماکسیمال هاوسدورف نتیجه می شود.

قضیه ۳. (لم تسورن). گیریم (A, \leq) مجموعه جزئاً مرتبی است که در آن هر زیرمجموعه کلاً مرتب کران بالادارد. آنگاه A عنصر ماکسیمال دارد.

برهان. بنا بر اصل ماکسیمال هاوسدورف، (A, \leq) يك زیرمجموعهٔ کلاً مرتب B دارد که نسبت به رابطهٔ شمول \subseteq ماکسیمال است. گیریم u يك کران بالای B است؛ u بنا بر فرض وجود دارد. ثابت خواهیم کرد که u عنصر ماکسیمال A است. اگر عنصر $x \in A$ چنان باشد که $x \geq u$ ، آنگاه $B \cup \{x\}$ يك زیرمجموعهٔ کلاً مرتب (A, \leq) است و شامل زیرمجموعهٔ کلاً مرتب ماکسیمال B است. در نتیجه باید داشته باشیم $B \cup \{x\} = B$ ، پس $x \leq u$. این ثابت می‌کند که u عنصر ماکسیمال (A, \leq) است.

قضیهٔ ۳، يك نمونه از قضیهٔ وجودی (در مقابل ساختنی) است؛ صرفاً وجود عنصر ماکسیمال را در مجموعه‌ای جزئاً مرتب بیان می‌دارد. برهان قضیهٔ ۳ هیچ‌گونه روش سازنده‌ای برای پیدا کردن عنصر ماکسیمال به دست نمی‌دهد. این نکته دربارهٔ قضیهٔ ۲ و تمام نتیجه‌هایی که در این فصل خواهد آمد، صادق است. به‌عنوان یکی از موارد استعمال لم تسورن، قضیهٔ زیر را اثبات می‌کنیم، در آخر بخش ۲ از فصل ۶ وعده داده بودیم برهان آن را بیاوریم.

قضیهٔ ۴. گیریم A و B مجموعه‌های غیر تهی هستند. آنگاه یا يك انزکسیون از A به B وجود دارد یا يك انزکسیون از B به A .

برهان. \mathcal{C} ، مجموعهٔ تمام جفت‌های (A_α, f_α) را، که در آن A_α يك زیرمجموعهٔ A است و $f_\alpha: A_\alpha \rightarrow B$ يك انزکسیون است، در نظر می‌گیریم. رابطهٔ \leq را روی \mathcal{C} چنین تعریف می‌کنیم:

$$(A_\alpha, f_\alpha) \leq (A_\beta, f_\beta) \text{ اگر و تنها اگر } f_\alpha \subseteq f_\beta \text{ و } A_\alpha \subseteq A_\beta$$

این رابطه آشکارا يك رابطهٔ ترتیب جزئی است. برای استفاده از لم تسورن، باید مطمئن باشیم که هر زیرمجموعهٔ کلاً مرتب \mathcal{C} ، مانند $\mathcal{C} = \{(A_\gamma, f_\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$ کران بالادارد. طبیعی است کران بالای \mathcal{C} را جفت $(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma, \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma)$ بگیریم. بنامید $A_1 = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ و $f_1 = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma$ آنگاه $f_1: A_1 \rightarrow B$ با $f_1(x) = f_\gamma(x)$ تعریف می‌شود، اگر $x \in A_\gamma$ و $(A_\gamma, f_\gamma) \in \mathcal{C}$. برای اثبات اینکه $f_1: A_1 \rightarrow B$ خوشتعریف است، فرض کنیم که x به زیرمجموعهٔ دیگری مانند A_δ ، $\delta \in \Gamma$ متعلق است. آنگاه $(A_\delta, f_\delta) \leq (A_\gamma, f_\gamma)$ یا $(A_\gamma, f_\gamma) \leq (A_\delta, f_\delta)$ ، و در هر دو حالت داریم $f_\gamma(x) = f_\delta(x)$. بنابراین $f_1(x) = f_\gamma(x) = f_\delta(x)$. اکنون نشان می‌دهیم که $f_1: A_1 \rightarrow B$ انزکتیو است. فرض کنید که برای يك x و يك y در A_1 ، $f_1(x) = f_1(y)$. آنگاه (A_γ, f_γ) و (A_δ, f_δ) در \mathcal{C} وجود دارند به‌قسمی که $x \in A_\gamma$ و $y \in A_\delta$ همانند قبل، یا $(A_\gamma, f_\gamma) \leq (A_\delta, f_\delta)$ یا $(A_\delta, f_\delta) \leq (A_\gamma, f_\gamma)$. می‌توانیم فرض کنیم که نامساوی اول درست است؛ آنگاه نتیجه می‌شود که $f_\delta(y) = f_\delta(x)$ و بنابراین $x = y$ ، زیرا f_δ انزکتیو است. این ثابت می‌کند که $f_1: A_1 \rightarrow B$ انزکتیو است. پس، برای هر $\gamma \in \Gamma$ ، $(A_1, f_1) \geq (A_\gamma, f_\gamma)$ و در نتیجه (\mathcal{C}, \leq) در فرض لم

لم نوردن ۱۵۹

نوردن صلق می کند. پس $\exists x$ يك عنصر ماكسيمال دارد كه ما آن را با (\tilde{A}, \tilde{f}) نشان می دهیم. حال دو حالت پیش می آید:

حالت ۱. $\tilde{A} = A$.

در این حالت $A \rightarrow B$ انزكسیون است و قضیه ثابت شده است.

حالت ۲. $\tilde{A} \neq A$.

گیریم $x_0 \in A - \tilde{A}$. در این حالت، نشان می دهیم كه $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow B$ بیژكتیو است. زیرا در غیر این صورت، يك عنصر $y_0 \in B - \tilde{f}(\tilde{A})$ وجود دارد. تابع $\tilde{f}: \tilde{A} \cup \{x_0\} \rightarrow B$ كه با $\tilde{f}(x_0) = y_0$ و $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x)$ برای هر $x \in \tilde{A}$ تعریف می شود، آشکارا يك انزكسیون است. بنابراین $(\tilde{A}, \tilde{f}) > (\tilde{A} \cup \{x_0\}, \tilde{f})$ ، كه ماكسيمال بودن (\tilde{A}, \tilde{f}) را نقض می کند. این ثابت می کند كه $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow B$ بیژكتیو است و در نتیجه، \tilde{f}^{-1} يك انزكسیون از B روی \tilde{A} ، زیرمجموعه A است. اکنون اثبات كامل است.

يك نتیجه مستقیم قضیه ۴ در زیر آمده است.

نتیجه. اگر A و B دو مجموعه باشند. آنگاه با $\text{card } A \leq \text{card } B$ یا $\text{card } B \leq \text{card } A$.

بنابراین اگر m و n دو عدد اصلی متمایز باشند، یا $m < n$ یا $n < m$.

تهرین ۴۰۷

۱. گیریم (A, \leq) يك مجموعه جزئاً مرتب است كه در آن هر زیرمجموعه "كلاً" مرتب يك کران پایین دارد. نشان دهید A عنصر مینیمال دارد.

۲. ثابت کنید كه از لم نوردن، اصل ماكسيمال هاوسدورف نتیجه می شود.

۳. برای دانشجویانی كه جبر خطی خوانده اند: ثابت کنید كه هر حلقه با عنصر يکه، يك ایدال ماكسيمال سره دارد.

۴. برای دانشجویانی كه جبر خطی خوانده اند: ثابت کنید كه هر فضای برداری يك پایه دارد. ۵. نتیجه قضیه ۴ را ثابت کنید.

۶. يك مجموعه جزئاً مرتب (A, \leq) ، مشبكه گفته می شود اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه دو عنصری $\{x, y\}$ کوچکترین کران بالا (ی يکنا)، كه با $x \vee y$ نشان داده می شود، و نیز بزرگترین کران پایین (ی يکنا)، كه با $x \wedge y$ نشان داده می شود، داشته باشد. ثابت کنید كه مشبكه ای، كه در آن هر زنجیر يك کران بالا دارد، عنصر ماكسيمال يکنا دارد.

۷. گیریم (A, \leq) يك مجموعه جزئاً مرتب است كه در آن هر زیرمجموعه "كلاً" مرتب يك کران بالا دارد، و فرض کنیم $a \in A$. آنگاه A يك عنصر ماكسيمال u دارد به قسمی

$$u \geq a$$

۸. گیریم B يك مجموعه است. می‌گوییم \mathcal{C} ، مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های B دارای مشخصهٔ متناهی است، هر گاه $A \in \mathcal{C}$ اگر و تنها اگر هر زیرمجموعهٔ متناهی A متعلق به \mathcal{C} باشد. ثابت کنید که اگر \mathcal{C} مشخصهٔ متناهی داشته باشد، آنگاه (\mathcal{C}, \subseteq) عنصر ماکسیمال دارد.

۹. گیریم A يك مجموعه دلخواه با بیش از يك عنصر است. ثابت کنید که يك بیژکسیون $f: A \rightarrow A$ وجود دارد به‌قوسی که برای هر $x \in A$ ، $f(x) \neq x$.

۴. اصل خوشترتیبی

اکنون لم تسورن را برای اثبات يك اصل حیرت‌انگیز در نظریهٔ مجموعه‌ها، یعنی اصل خوشترتیبی ارنست تسرملو (۱۸۷۱-۱۹۵۳)، به‌کار می‌بریم.

تعریف ۴. يك مجموعهٔ كاملاً مرتب (A, \leq) خوشترتیب گفته می‌شود اگر و تنها اگر هر زیرمجموعهٔ غیر تهی A مانند B شامل عنصر مینیمال (یکتا) باشد؛ یعنی، اگر يك عنصر $b \in B$ وجود داشته باشد به‌قوسی که برای هر $x \in B$ ، $b \leq x$. b را کوچکترین عنصر B می‌نامند. اگر (A, \leq) يك مجموعهٔ خوشترتیب باشد آنگاه رابطهٔ \leq را رابطهٔ خوشترتیبی می‌گویند.

مثال ۵. (الف) مجموعهٔ اعداد طبیعی تحت رابطهٔ «کوچکتر یا مساوی» خوشترتیب است. (ب) مجموعهٔ اعداد گویا تحت رابطهٔ معمولی «کوچکتر یا مساوی» خوشترتیب نیست.

مجموعهٔ A را خوشترتیب می‌گویند هر گاه يك رابطهٔ خوشترتیبی روی A وجود داشته باشد.

قضیهٔ ۵. (اصل خوشترتیبی). هر مجموعه خوشترتیب شدنی است.

برهان. گیریم H مجموعهٔ دلخواه مفروض است که باید خوشترتیب شود. A° مجموعهٔ تمام مجموعه‌های خوشترتیب (A_\circ, \leq_\circ) را، که در آن $A_\circ \subseteq H$ ، در نظر بگیرید. A° را از راه زیر جزئاً مرتب می‌کنیم: می‌نویسیم $(A_1, \leq_1) \leq_\circ (A_\circ, \leq_\circ)$ اگر و تنها اگر

$$A_\circ \subseteq A_1 \quad (\text{يك})$$

$$x \leq_\circ y \text{ و } x \leq_1 y \text{ نتیجه دهد} \quad (\text{دو}) \quad x, y \in A_\circ$$

و

$$x \in A_1 - A_\circ \text{ نتیجه دهد که برای تمام } y \in A_\circ, x \leq_1 y.$$

خواننده باید بررسی کند که این رابطهٔ \leq_\circ واقعاً يك رابطهٔ ترتیبی جزئی روی A° است. برای به‌کار بردن لم تسورن، نشان می‌دهیم که هر زیرمجموعهٔ کلاً مرتب (A°, \leq_\circ) مانند \mathcal{B} کران بالا دارد. طبیعی است این کران بالا را $(\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A, \leq_1)$ بگیریم، که در آن

۱. برای ساده بودن علامتگذاری، از این به بعد نماد $A \in \mathcal{B}$ به معنی $(A, \leq) \in \mathcal{B}$ خواهد بود.

$x \leq' y$ اگر و تنها اگر x و y متعلق به يك A_i باشند به قسمی که $(A_{i_0}, \leq_{i_0}) \in \mathcal{B}$ و $x \leq_{i_0} y$. بدیهی است که اگر $(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A, \leq')$ متعلق به A^* باشد، $(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A, \leq')$ يك کران بالای \mathcal{B} خواهد بود. ثابت خواهیم کرد که $(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A, \leq')$ خوشترتیب است و بنا بر این متعلق به A^* است. تحقیق در اینکه \leq' يك رابطه کلا مرتب روی $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ است ساده است و آن را به عهده خواننده می گذاریم. گیریم S يك زیر مجموعه غیر تهی $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ است. آنگاه $(A_{i_0}, \leq_{i_0}) \in \mathcal{B}$ وجود دارد به قسمی که $A_{i_0} \cap S$ را قطع می کند. چون (A_{i_0}, \leq_{i_0}) خوشترتیب است، $S \cap A_{i_0}$ شامل کوچکترین عنصر یکناست که آن را x_0 می نامیم $(x_0 \in S \cap A_{i_0})$. از این نتیجه می شود که برای هر $y \in S$ ، مجموعه $(A_{i_1}, \leq_{i_1}) \in \mathcal{B}$ وجود دارد به گونه ای که $(A_{i_1}, \leq_{i_1}) \leq^* (A_{i_0}, \leq_{i_0})$ و $x_0 \leq_{i_1} y$ پس $x_0 \leq_{i_1} y$ و از این رو $x_0 \leq' y$. پس x_0 کوچکترین عنصر S تحت \leq' است، بنابراین $(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A, \leq')$ خوشترتیب است.

بنابر لم تسورن، (A^*, \leq^*) يك عنصر ماکسیمال (A_{i_1}, \leq_{i_1}) دارد. ثابت می کنیم که $A_{i_1} = H$ و از این رو (A_{i_1}, \leq_{i_1}) خوشترتیب است. زیرا، اگر $A_{i_1} \neq A$ ، آنگاه يك x_{i_1} در $H - A_{i_1}$ انتخاب کنید و \leq_{i_1} را به $A_{i_1} \cup \{x_{i_1}\}$ از راه تعریف $x \leq_{i_1} x_{i_1}$ برای هر $x \in A_{i_1}$ تعمیم دهید، آنگاه مجموعه $(A_{i_1} \cup \{x_{i_1}\}, \leq_{i_1})$ تحت \leq^* اکیداً از (A_{i_1}, \leq_{i_1}) بزرگتر است و این ماکسیمال بودن (A_{i_1}, \leq_{i_1}) را نقض می کند. برهان اصل خوشترتیبی اکنون کامل است.

اصل خوشترتیبی يك نمونه برجسته دیگر از قضیه غیر سازنده است. برهان قضیه ۵ به هیچ وجه راه «خوشترتیب کردن» عناصر H را نشان نمی دهد؛ بلکه تنها حکم می کند که يك رابطه خوشترتیبی وجود دارد. درحقیقت، حتی نمی دانیم چگونه اعداد حقیقی را می توان خوشترتیب کرد.

ما تاکنون تسلسل منطقی زیر را نشان داده ایم: اصل انتخاب $\stackrel{2}{\Leftrightarrow}$ اصل ماکسیمال هاوسدورف $\stackrel{3}{\Leftrightarrow}$ لم تسورن $\stackrel{4}{\Leftrightarrow}$ اصل خوشترتیبی.

برای تکمیل برهان هم ارزی این چهار اصل، کافی است نشان دهیم که از اصل خوشترتیبی، اصل انتخاب نتیجه می شود.

قضیه ۶. از اصل خوشترتیبی، اصل انتخاب نتیجه می شود.

برهان. گیریم S يك مجموعه غیر تهی است که عناصرش مجموعه های غیر تهی هستند. بنا بر اصل خوشترتیبی، يك رابطه کلا مرتب \leq وجود دارد به گونه ای که $(\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A, \leq)$ خوشترتیب است. در نتیجه، هر مجموعه $A \in \mathcal{S}$ شامل کوچکترین عنصر است. اکنون برای هر $A \in \mathcal{S}$ ، مقدار، $f(A)$ یعنی $f: \mathcal{S} \rightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$ را کوچکترین عنصر A می گیریم. این تابع خوشترتیب و يك تابع انتخاب است. این اصل انتخاب را ثابت می کند.*

* به عبارت دیگر، اصل خوشترتیبی \Leftrightarrow اصل انتخاب. م.

به این ترتیب هم‌ارزی اصل انتخاب، اصل ماکسیمال هاوسدورف، لم‌تسورن، و اصل خوشترتیبی را ثابت کرده‌ایم. در باقیمانده این کتاب اصل انتخاب (و سه اصل هم‌ارز دیگر آن) را خواهیم پذیرفت و از آن استفاده خواهیم کرد.

تمرین ۴۰۷

۱. نشان دهید که مجموعه اعداد حقیقی تحت رابطه «کوچکتر یا مساوی» معمول در اعداد حقیقی، خوشترتیب نیست.
۲. بدون استفاده از قضیه ۵، مستقیماً ثابت کنید که مجموعه اعداد گویا را می‌توان خوشترتیب کرد.
۳. ثابت کنید که هر زیرمجموعه Y از مجموعه خوشترتیب، تحت رابطه القایی، خوشترتیب است.
۴. فرض کنید (A, \leq) یک مجموعه جزئاً مرتب است به قسمی که هر زیرمجموعه غیرتهی B شامل یک کران پایین است؛ یعنی، $b \in B$ وجود دارد به قسمی که برای هر $x \in B$ ، $b \leq x$. ثابت کنید که مجموعه جزئاً مرتب (A, \leq) کلاً مرتب و در نتیجه خوشترتیب است.
۵. ثابت کنید که رابطه تعریف شده \leq^* در برهان قضیه ۵، یک رابطه ترتیبی جزئی روی A^* است.
۶. ثابت کنید که رابطه تعریف شده \leq' در برهان قضیه ۵، یک رابطه کلاً مرتب روی $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ است.
۷. فرض کنید (A, \leq) یک مجموعه کلاً مرتب است. دنباله عناصر a_1, a_2, a_3, \dots در A اکیداً نزولی گفته می‌شود اگر $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$. ثابت کنید که مجموعه کلاً مرتب، خوشترتیب است اگر و تنها اگر مجموعه کلاً مرتب، شامل هیچ دنباله اکیداً نزولی نامتناهی نباشد.

۵. اصل استقرای ترامتناهی

برای اینکه اصل استقرای ترامتناهی ساده بیان شود و همچنین برای مطالعه اعداد ترتیبی در فصل بعدی، مفهوم قطعه را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۵. گیریم (A, \leq) یک مجموعه کلاً مرتب است. یک قطعه از A (یا قطعه A) یک زیرمجموعه S از A است به گونه‌ای که اگر $x \in A$ ، $y \in S$ و $x \leq y$ ، آنگاه $x \in S$. یک قطعه سره A ، قطعه‌ای است که زیرمجموعه سره A است.

مثال ۶. گیریم (A, \leq) یک مجموعه خوشترتیب، و x یک عنصر اختیاری A است. آنگاه مجموعه تهی، مجموعه A ، و مجموعه $A_x = \{a \in A \mid a < x\}$ قطعه‌های A هستند.

قضیه ۷. گیریم (A, \leq) يك مجموعه خوشترتیب است. آنگاه (الف) هراجماع یا اشتراك قطعه‌های A و تمام قطعه‌های يك قطعه A ، نیز قطعه‌های A هستند.

(ب) هر قطعه A ، بجز خود A ، باشد، يك عنصر $x \in A$ وجود دارد به قسمی که $S = A_x$ ، که در آن $A_x = \{a \in A \mid a < x\}$.

پروان. (الف) گیریم \mathcal{C} يك خانواده از قطعه‌های A است، و $y \in \bigcup_{S \in \mathcal{C}} S$. اگر $x \in A$ و $x \leq y$ ، آنگاه چون y به يك قطعه $S_0 \in \mathcal{C}$ از A تعلق دارد، داریم $x \in S_0$ و لذا $x \in \bigcup_{S \in \mathcal{C}} S$. بنابراین، $\bigcup_{S \in \mathcal{C}} S$ يك قطعه A است. به طریق مشابه، اشتراك خانواده \mathcal{C} از قطعه‌های A ، يك قطعه A است. (مسئله ۳ را ببینید).

گیریم S يك قطعه A و T يك قطعه S است. فرض کنیم $x \in A$ ، $y \in T$ و $x \leq y$ ؛ باید نشان دهیم که $x \in T$. نخست، چون y به قطعه S تعلق دارد، داریم $x \in S$ ؛ آنگاه از $x \in S$ ، $y \in T$ و $x \leq y$ فرض اینکه T يك قطعه S است، داریم $x \in T$. این نشان می‌دهد که T يك قطعه از A است.

(ب) گیریم S يك قطعه از A است به گونه‌ای که $S \neq A$. آنگاه مجموعه غیرتهی $A - S$ يك کوچکترین عنصر مانند x دارد. به عنوان يك تمرین ساده، تحقیق اینکه $S = A_x$ به خواننده واگذار می‌شود.

قضیه زیر مقدمه‌ای بر اصل استقرای ترامت‌های است.

قضیه ۸. گیریم (A, \leq) يك مجموعه خوشترتیب، و \mathcal{S} يك مجموعه قطعه‌های A است به قسمی که

(۱) هراجماع عضوهای \mathcal{S} به \mathcal{S} متعلق است،

(۲) اگر $A_x \in \mathcal{S}$ ، آنگاه $A_x \cup \{x\} \in \mathcal{S}$ ،

در این صورت \mathcal{S} شامل تمام قطعه‌های A است.

پروان. فرض کنید که يك عنصر $x \in A$ وجود دارد به قسمی که قطعه $A_x \notin \mathcal{S}$. چون (A, \leq) خوشترتیب است، زیرمجموعه غیرتهی $B = \{x \in A \mid A_x \notin \mathcal{S}\}$ کوچکترین عنصری مانند a دارد. چون $a \in B$ ، $A_a \notin \mathcal{S}$. اگر $y \in A$ و $y < a$ ، آنگاه $y \notin B$ و از این رو $A_y \in \mathcal{S}$. بنا بر فرض (۱)، $\bigcup_{y < a} A_y \in \mathcal{S}$. بنا بر قضیه ۷، يك عنصر $b \in A$ وجود دارد به گونه‌ای که $\bigcup_{y < a} A_y = A_b$. در نتیجه $b < a$ (مسئله ۹ را ببینید). حال با استفاده از فرض (۲) و قضیه ۷، داریم

$$A_b \cup \{b\} = A_c \in \mathcal{S} \quad c \in A \text{ يك } c \in A$$

از این رو داریم $b < c < a$ در نتیجه

$$b \in A_c \subseteq \bigcup_{y < a} A_y = A_b$$

که $b \notin A_b$ را نقض می‌کند. بنابراین برای هر $x \in A$ ، $A_x \in \mathcal{S}$. اکنون ثابت می‌کنیم که $A \in \mathcal{S}$. بنا بر فرض (۱) داریم $\bigcup_{x \in A} A_x \in \mathcal{S}$. اگر $\bigcup_{x \in A} A_x = A$ ، آنگاه قضیه ثابت شده است. فرض کنید که $\bigcup_{x \in A} A_x \neq A$ ؛ آنگاه يك عنصر $d \in A$ وجود دارد به قسمی که $\bigcup_{x \in A} A_x = A_d$. بنا بر فرض (۲)، $A_d \cup \{d\} \in \mathcal{S}$. از این نتیجه می‌شود که برای هر $x \in A$ ، $x \leq d$ ، و از این رو $A = A_d \cup \{d\} \in \mathcal{S}$ ، و اثبات کامل است.

تذکر. در قضیه ۸، فرض (۱) نتیجه می‌دهد $\emptyset \in \mathcal{S}$. زیرا $\{\emptyset\} \in \mathcal{S}$ را می‌توان از فرض (۱)، یعنی از «هر اجتماع عضوهای \mathcal{S} متعلق به \mathcal{S} است» به دست آورد؛ از «اجتماع تهی» عضوهای \mathcal{S} نتیجه مطلوب به دست می‌آید (قضیه ۷ (الف)، فصل ۲ را ببینید). پس \mathcal{S} غیر تهی است.

قضیه ۹. (اصل استقرای ترامتناهی). گیریم (A, \leq) يك مجموعه خوشترتیب است. برای هر $x \in A$ ، گیریم $p(x)$ گزاره‌ای درباره x است. اگر برای هر $x \in A$ ، فرض « $p(y)$ برای هر $y < x$ راست است» نتیجه دهد که « $p(x)$ راست است»، آنگاه $p(x)$ برای هر $x \in A$ راست است.

پوهان. فرض کنید که يك x وجود دارد به قسمی که $p(x)$ دروغ است. آنگاه $\{p(x) \text{ دروغ است} \mid x \in A\} = B$ يك زیرمجموعه غیر تهی A است، و از این رو کوچکترین عنصری مانند x_0 دارد. چون $x_0 \in B$ ، $p(x_0)$ دروغ است. اگر $y \in A$ و $y < x_0$ ، آنگاه $y \notin B$ ، و از این رو $p(y)$ راست است. پس برای هر $y < x_0$ ، $p(y)$ راست است. بنابراین $p(x_0)$ راست است و این با $p(x_0)$ دروغ است، تناقض دارد. در نتیجه، $p(x)$ برای هر $x \in A$ راست است.

قضیه بعدی يك مثال نمونه است برای دیدن اینکه چگونه استقرای ترامتناهی در احکام ریاضی به کار می‌رود. این قضیه در مبحث اعداد ترتیبی در فصل ۸ به کار خواهد رفت. نخست به تعریف زیر نیاز داریم.

گیریم (A, \leq) و (B, \leq') مجموعه‌های خوشترتیب هستند. تابع $f: A \rightarrow B$ صعودی گفته می‌شود اگر و تنها اگر از $a \leq a'$ در (A, \leq) نتیجه شود $f(a) \leq' f(a')$ در (B, \leq') ، اکیداً صعودی گفته می‌شود اگر و تنها اگر از $a < a'$ در (A, \leq) نتیجه شود $f(a) < f(a')$ در (B, \leq') .

قضیه ۱۰. گیریم (A, \leq) و (B, \leq') مجموعه‌های خوشترتیب هستند. اگر $f: A \rightarrow B$ صعودی باشد، $f(A)$ يك قطعه از B است، و اگر $g: A \rightarrow B$ اکیداً صعودی باشد، آنگاه برای هر $x \in A$ ، $f(x) \leq' g(x)$.

برهان. برای استفاده از استقرای ترانتهایی، برای هر $x \in A$ ، $p(x)$ را گزاره « $f(x) \leq' g(x)$ » می‌گیریم. برای اینکه نشان دهیم فرض قضیه q برقرار است، برخلاف حکم، فرض می‌کنیم که یک عنصر $a \in A$ وجود دارد به‌قسمی که $p(x)$ برای هر $x < a$ راست است، اما $p(a)$ دروغ است. یعنی، برای هر $x < a$ ، $f(x) \leq' g(x)$ ، و $f(a) <' g(a)$. چون g اکیداً صعودی و f صعودی است، برای هر $x < a$ و هر $y \geq a$ داریم

$$f(x) \leq' g(x) <' g(a) <' f(a) \leq' f(y)$$

از این نتیجه می‌شود که $g(a) <' f(a)$ و $g(a) \notin f(A)$ ، که قطعه بودن $f(A)$ در B را نقض می‌کند. بنابراین برای هر $x \in A$ ، اگر برای هر $y < x$ ، $f(y) \leq' g(y)$ آنگاه $f(x) \leq' g(x)$. بنا بر اصل استقرای ترانتهایی، برای هر $x \in A$ ، $f(x) \leq' g(x)$.

تمرین ۵-۷

۱. گیریم \mathbb{N} مجموعه تمام اعداد طبیعی است، و برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، گیریم $N_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$. تمام قطعه‌های (\mathbb{N}, \leq) را بیابید که در آن \leq همان رابطه معمولی «کوچکتر یا مساوی» اعداد طبیعی است.
۲. گزاره مثال ۶ را ثابت کنید.
۳. گیریم (A, \leq) یک مجموعه خوشترتیب است. ثابت کنید (الف) اشتراك يك خانواده دلخواه از قطعه‌های A ، يك قطعه A است. (ب) برای هر $x \in A$ ، $A_x \cup \{x\}$ يك قطعه A است.
۴. برهان قضیه ۷ (ب) را کامل کنید.
۵. يك برهان مستقیم برای قضیه ۹ بیاورید [راهنمایی: از قضیه ۸ استفاده کنید].
۶. گیریم (A, \leq) و (B, \leq') مجموعه‌های خوشترتیب هستند، و نیز گیریم $f: A \rightarrow B$ تابعی صعودی است به‌قسمی که $f(A)$ يك قطعه B است. ثابت کنید که f هر قطعه A را به يك قطعه B می‌برد.
۷. ثابت کنید که در يك مجموعه خوشترتیب هر زیرمجموعه که از طرف بالا کراندار است، کوچکترین کران بالای (یکتا) دارد.
۸. گیریم (A, \leq) خوشترتیب است. ثابت کنید که برای هر $x \in A$ ، کوچکترین کران بالای قطعه A_x از A است.
۹. ثابت کنید که در برهان قضیه ۸، $b < a$. [راهنمایی: حالت‌های (يك) $b = a$ و (دو) $a < b$ را در نظر بگیرید].

۶. نکات تاریخی

شاید دانستن تاریخچه کوتاهی از اصل موضوع انتخاب مفید باشد؛ این اصل از خیلی جهات

شبهه اصل موضوع توازی اقلیدس و فرض پیوستار است (بخش ۸ فصل ۶ را ببینید). در اوایل دهه ۱۸۸۰، گئورگ کانتور تلویحاً استدلالهایی در برهان بعضی قضایا به‌کار برده بود، که اساساً هم‌ارز با اصل انتخاب بودند؛ اما او توجه نداشت که یک اصل موضوع قوی جدیدی به‌کار می‌برد. در ۱۹۰۴، ارنست تسرملو* (۱۸۷۱-۱۹۵۳) بعد از مطالعاتی دقیق، اصل انتخاب را صریحاً عنوان کرد و از آن در اثبات قضیه خوشترتیبی استفاده کرد (که ما هم آنرا اصل خوشترتیبی گفته‌ایم). چون برای خوشترتیب کردن حتی مجموعه‌های آشنای اعداد حقیقی هیچ راهی پیدا نشده‌است، علیرغم حکم قضیه خوشترتیبی، تا مدت‌ها حداقل شش سال بعد از ظهور این قضیه، مقالات انتقادی زیادی درباره برهان تسرملو نوشته شد. اکثر اصل انتخاب را رد کردند. با این حال اکثر منتقدین باید می‌پذیرفتند که اگر اصل موضوع انتخاب را قبول می‌کردند، نمی‌توانستند اشتباهی در برهان تسرملو برای قضیه خوشترتیبی بیابند. بنابراین، انتقاد از قضیه خوشترتیبی به انتقاد از اصل انتخاب منجر می‌شد. به نظر می‌رسید که فقط دو راه وجود دارد:

(الف) اصل را بر این بگذاریم که تنها نتیجه‌های ساخته‌شدنی را بپذیریم و نتیجه‌های وجودی محض را نپذیریم، آنگاه روشها و عرضه‌های ریاضیات آنقدر محدود می‌شوند که، خارج از حساب، تنها زمینه‌های بسیار کوچکی را می‌توان بررسی کرد.

(ب) نتیجه‌های ساخته‌شدنی و وجودی محض، از جمله اصل موضوع انتخاب، را بپذیریم و در نتیجه، به حل مسائل بیشتر و توسعه دادن ریاضیات پردازیم. برای اینکه بتوان مشخص کرد که پیروی از کدام روش عاقلانه است، باید قبلاً به دو سؤال مشکل زیر توجه شود:

(۱) آیا اصل انتخاب از اصول موضوع موجود مستقل است، یا به وسیله دیگر اصول موضوع موجود ریاضی ثابت می‌شود؟

(۲) آیا اصل انتخاب با دیگر اصول کلاسیک ریاضی سازگاد است یا ممکن است افزودن اصل انتخاب به دیگر اصول موضوع کلاسیک ریاضی، موجب به‌وجود آمدن تناقض شود؟

همان‌طور که در فرض پیوستار پیش آمد، بسیاری از ریاضیدانان برای رسیدن به جوابهای این دو سؤال کوشش فراوان کردند. چندین سال بعد، در ۱۹۳۸، کورت گودل (۱۹۰۶-) با اثبات اینکه افزودن اصل موضوع انتخاب به دیگر اصول موضوع موجود ریاضی هیچ تناقضی ایجاد نمی‌کند، به سؤال دوم جواب داد. کشف گودل، به‌جامعه ریاضی و بخصوص به استفاده‌کنندگان از اصل موضوع انتخاب، آسایش خاطر و اطمینان

* Ernst Zermelo

1. K. Gödel, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1940, 66 pp. Rev. ed., 1951. 74 pp.

نکات تاریخی ۱۶۷

زیادی داد. اما تحقیق برای پاسخ به سؤال اول همچنان ادامه یافت. بالاخره، در ۱۹۶۳، پل کوهن کاملاً به سؤال جواب داد. او ثابت کرد که اصل موضوع انتخاب درحقیقت از دیگر اصول موضوع موجود، مستقل است. بسه عبارت دیگر، اصل موضوع انتخاب را نمی توان به عنوان يك قضیه با استفاده از اصول موضوع کلاسیک ریاضی ثابت کرد.

امروزه اصل موضوع انتخاب را به عنوان يك اصل جدید اکثراً پذیرفته اند، و لزوم آن برای آنالیز حقیقی جدید، نظریه اعداد اصلی و ترتیبی ترامتناهی، جبر جدید و عرصه وسیعی از توپولوژی روشن شده است.



اعداد ترتیبی و حساب ترتیبی

مفهوم اعداد ترتیبی را معرفی کرده و شگفتیهای حساب ترتیبی را در مطالعه جمع و ضرب ترتیبی ذکر کرده ایم. عدد اصلی را از نو به صورت عدد ترتیبی آغازی بررسی کرده، و پارادوکس بودالمی فلوتتی را شرح داده ایم.

۱. مفهوم اعداد ترتیبی

به طور ساده می توان گفت که در محاسبات منتهای، اعداد اصلی همان اعداد «شمارشی» $1, 2, 3, \dots$ و «اعداد ترتیبی» همان اعداد «مرتبهای»: اولین، دومین، سومین، و... هستند. تمایز بین اعداد اصلی منتهای و اعداد ترتیبی منتهای آنقدر ناچیز است که اعداد طبیعی را می توان در هر دو مورد به کار برد. اما مفهوم «عدد ترتیبی نامتناهی» حقیقتاً چیست؟ همچنانکه عدد اصلی ترامتاهی از مجموعه نامتناهی ناشی می شود، عدد ترتیبی نامتناهی (= ترامتاهی) از مجموعه خوشترتیب نامتناهی به وجود می آید. تعریف زیر در مجموعه های خوشترتیب به تعریف رابطه همخوانی در مجموعه ها شبیه است.

تعریف ۱. می گوئیم دو مجموعه خوشترتیب (A, \leq) و (B, \leq') همریخت ترتیبی هستند اگر يك دوسویی مانند $f: A \rightarrow B$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $a_1, a_2 \in A$ و $a_1 \leq a_2$ داشته باشیم $f(a_1) \leq' f(a_2)$. تابع f را يك همریختی ترتیبی می نامیم.

از این تعریف نتیجه می‌شود که اگر $f: A \rightarrow B$ یک هم‌ریختی ترتیبی باشد، و آنگاه $g: B \rightarrow C$ نیز یک هم‌ریختی ترتیبی است و به علاوه اگر $g: B \rightarrow C$ نیز یک هم‌ریختی ترتیبی باشد، ترکیب f و g یعنی $g \circ f: A \rightarrow C$ نیز یک هم‌ریختی ترتیبی است. اگر دو مجموعه (A, \leq) و (B, \leq') هم‌ریخت ترتیبی باشند، می‌نویسیم $(B, \leq') \approx (A, \leq)$ و یا به طور ساده $A \approx B$. «رابطه» هم‌ریخت ترتیبی \approx ، همانند رابطه هم‌توانی \sim ، انعکاسی، متقارن و متعدی است.^۱

در حالت کلی، اعداد ترتیبی، منتهای یا ترامتناهی، را یک مفهوم اولیه می‌گیریم که قاعده‌های زیر در آن صادق‌اند:

۱- به هر مجموعه خوشترتیب (A, \leq) یک عدد ترتیبی، که آن را با $\text{ord}(A, \leq)$ نشان می‌دهیم، نسبت داده می‌شود، و اگر α یک عدد ترتیبی باشد، یک مجموعه خوشترتیب (A, \leq) وجود دارد به قسمی که $\text{ord}(A, \leq) = \alpha$.
 ۲- فرض کنید (A, \leq) و (B, \leq') دو مجموعه خوشترتیب هستند. $\text{ord}(A, \leq) = \text{ord}(B, \leq')$ اگر و تنها اگر $(A, \leq) \approx (B, \leq')$. چون هر دو مجموعه خوشترتیب منتهای که تعداد عضوهایشان مساوی باشند هم‌ریخت ترتیبی هستند، نمادهای مناسب زیر را انتخاب می‌کنیم:

۳- $\text{ord}(A, \leq) = 0$ اگر و تنها اگر $A = \emptyset$.

۴- اگر مجموعه خوشترتیب (A, \leq) به قسمی باشد که برای عدد طبیعی k داشته باشیم $A \sim \{1, 2, \dots, k\}$ ، آنگاه $\text{ord}(A, \leq) = k$.
 عدد ترتیبی مجموعه اعداد طبیعی \mathbb{N} ، با رابطه کوچکتر یا مساوی معمولی، را معمولاً با حرف یونانی ω ، نشان می‌دهند؛ یعنی $\omega = \text{ord}\{1, 2, 3, \dots\}$.
 هر مجموعه مفروض فقط یک عدد اصلی دارد، در صورتی که یک مجموعه ممکن است تحت خوشترتیبهای متفاوت، عددهای ترتیبی متمایز داشته باشد. مثلاً، مجموعه اعداد طبیعی را می‌توان به صورت

$$(\mathbb{N}, \leq) = \{1, 2, 3, \dots\}$$

و یا به صورت

$$(\mathbb{N}, \leq') = \{1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots\}$$

خوشترتیب کرد. بررسی اینکه این دو مجموعه خوشترتیب هم‌ریخت ترتیبی نیستند را به خواننده محول می‌کنیم. در نتیجه، $\text{ord}(\mathbb{N}, \leq') \neq \omega$.

۱. در اینجا \approx به معنای رابطه‌ای روی یک مجموعه از مجموعه‌های خوشترتیب است (قضیه ۵ فصل ۵).

۲. در این فصل، از این به بعد قرار می‌گذاریم اعضای مجموعه را به ترتیبی بنویسیم که ترتیب در مجموعه را نشان دهد. بنابراین $\{1, 2, 3, \dots\}$ مجموعه خوشترتیب \mathbb{N} را با ترتیب معمولی و $\{1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots\}$ مجموعه \mathbb{N} را با ترتیب دیگری نشان می‌دهد.

تقریب ۱۰۸

۱. فرض کنید A و B دو مجموعه متناهی همتوان هستند. همچنین فرض کنید (A, \leq) و (B, \leq') خوشترتیب هستند. ثابت کنید که (A, \leq) و (B, \leq') همریخت ترتیبی هستند.
۲. فرض کنید (A, \leq) يك مجموعه کلاً مرتب و اجتماعی از دو مجموعه B و C است. همچنین فرض کنید دو مجموعه B و C با رابطه‌های القایی از رابطه ترتیبی A ، یعنی \leq ، خوشترتیب هستند. ثابت کنید (A, \leq) خوشترتیب است.
۳. روی مجموعه اعداد طبیعی \mathbb{N} دو رابطه خوشترتیبی به صورت‌های زیر در نظر می‌گیریم:

$$(\mathbb{N}, \leq) = \{1, 2, 3, \dots\}$$

و

$$(\mathbb{N}, \leq') = \{1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots\}$$

ثابت کنید (\mathbb{N}, \leq) و (\mathbb{N}, \leq') همریخت ترتیبی نیستند.

۴. در مسئله ۳ی بالا، نشان دهید که (\mathbb{N}, \leq') خوشترتیب است.

۲. ترتیب اعداد ترتیبی

اصل ت-۲، از بخش قبل، به ما می‌گوید چه موقع دو عدد ترتیبی مساوی‌اند و چه موقع ناساوی. اگر دو عدد ترتیبی ناساوی باشند، می‌خواهیم بتوانیم بگوییم یکی «کوچکتر» از دیگری است. تعریف زیر همین منظور را برآورده می‌کند.

تعریف ۲. گیریم α و β دو عدد ترتیبی، و مجموعه‌های خوشترتیب (A, \leq) و (B, \leq') به‌نسی هستند که $\text{ord}(A, \leq) = \alpha$ و $\text{ord}(B, \leq') = \beta$. گوییم α کوچکتر از β یا مساوی با آن است اگر و تنها اگر (A, \leq) با يك قطعه از (B, \leq') همریخت ترتیبی باشد. این رابطه را با $\alpha \leq \beta$ و یا $\beta \geq \alpha$ نشان می‌دهیم. اگر $\alpha \leq \beta$ و $\alpha \neq \beta$ ، می‌نویسیم $\alpha < \beta$ و یا $\beta > \alpha$.

بندیی است که تعریف ۲ به انتخاب مجموعه‌های خوشترتیب (A, \leq) و (B, \leq') بستگی ندارد. همچنین واضح است که رابطه « \leq » انعکاسی و متعددی است. در قضیه ۲ ثابت می‌کنیم که این رابطه، ساد متقارن نیز هست. پس « \leq » يك «رابطه» ترتیبی جزئی است. مدف نهایی ما این است که ثابت کنیم « \leq » يك «رابطه» کلاً مرتب است.

۱. دقیقاً بگوییم، « \leq » يك رابطه نیست زیرا که «حوزه» آن يك مجموعه نیست (قضیه ۱۳ را ببینید). معهداً، ما آنرا يك رابطه می‌گیریم که در هر مجموعه مفروض از اعداد ترتیبی تعریف شده است (قضیه ۵ فصل ۵).

قضیه ۰۱. تنها همریختی ترتیبی مجموعه خوشترتیب (A, \leq) روی يك قطعه از (A, \leq) ، نگاشت همانی از A روی A است.

برهان. به روش برهان خلف عمل می‌کنیم. فرض کنید A_0 قطعه‌ای از A است و همریختی $f: A \rightarrow A_0$ وجود دارد. آنگاه $f(a) < a$ ، و در نتیجه مجموعه $B = \{x \in A \mid f(x) < x\}$ تهی نیست. کوچکترین عضو B را b می‌گیریم. آنگاه $f(b) < b$ ، و چون همریختی ترتیبی، اکیداً صعودی است داریم $f(f(b)) < f(b)$. این ثابت می‌کند که $f(b)$ که از b کوچکتر است، در B است، و این يك تناقض است، زیرا b کوچکترین عضو B است. از این تناقض نتیجه می‌گیریم که يك مجموعه خوشترتیب نمی‌تواند با يك قطعه سره خودش همریخت ترتیبی باشد. اکنون برای اینکه برهان قضیه را کامل کنیم باید ثابت کنیم که نگاشت همانی $I_A: A \rightarrow A$ تنها همریختی ترتیبی از A روی A است.

گیریم $g: A \rightarrow A$ يك همریختی ترتیبی باشد. آنگاه چون دوهمریختی ترتیبی g و I_A ، همریختی همانی، اکیداً صعودی هستند، دوبار از قضیه ۱۰ فصل ۷ استفاده کرده می‌گوییم: برای هر $x \in A$ داریم $I_A(x) \leq g(x) \leq I_A(x)$ و بنا بر این $g = I_A$.

قضیه ۰۲. اگر دو عدد ترتیبی α و β به قسمی باشند که $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \alpha$ ، آنگاه $\alpha = \beta$.

برهان. گیریم دو مجموعه خوشترتیب (A, \leq) و (B, \leq') به قسمی هستند که $\alpha = \text{ord}(A, \leq)$ و $\beta = \text{ord}(B, \leq')$. بنا بر فرض $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \alpha$ ، یعنی دوهمریختی ترتیبی

$$f: A \rightarrow D \quad \text{و} \quad g: B \rightarrow C$$

وجود دارند که در آنها D قطعه‌ای از B و C قطعه‌ای از A است. در نتیجه تابع $h: A \rightarrow C$ با ضابطه $h(x) = g(f(x))$ به ازای هر $x \in A$ ، يك همریختی ترتیبی از A روی يك قطعه از C ، مانند E ، می‌باشد. اما بنا بر قضیه ۱ و قضیه ۷ از فصل ۷، باید داشته باشیم $E = A$. در نتیجه $C = A$ و همریختی ترتیبی $g: B \rightarrow A$ نشان می‌دهد که $\alpha = \beta$.

تا اینجا ثابت کرده‌ایم که رابطه \leq برای اعداد ترتیبی، يك رابطه ترتیبی جزئی است. در قضیه زیر نشان می‌دهیم که \leq ، يك رابطه کلاً مرتب است.

قضیه ۰۳. برای هر دو عدد ترتیبی α و β ، یا $\alpha \leq \beta$ یا $\beta \leq \alpha$.

برهان. گیریم (A, \leq) و (B, \leq') دو مجموعه خوشترتیب هستند به قسمی که $\text{ord}(A, \leq) = \alpha$ و $\text{ord}(B, \leq') = \beta$. ثابت می‌کنیم که یا A با يك قطعه از B همریخت ترتیبی است یا B با يك قطعه از A همریخت ترتیبی است. يك عضو $a \in A$ را

پذیرفتنی گوئیم هرگاه قطعه A_0 از A با يك قطعه B_0 از B ($b \in B$) همريخت ترتیبی باشد. گيريم M مجموعه تمام عضوهای پذیرفتنی A است. از قضیه ۱ نتیجه می شود که برای هر عضو پذیرفتنی a ، يك عضو یکتای $b \in B$ وجود دارد به قسمی که $A_0 \approx B_0$ (مسئله ۸ را ببینید). در نتیجه يك نگاشت خوشتعريف $f: M \rightarrow B$ که با $f(a) = b$ ، اگر $A_0 \approx B_0$ تعريف می شود، وجود دارد. دوباره از قضیه ۱ نتیجه می شود که تابع f ، يك به يك است. با خواننده است بررسی کند که $f: M \rightarrow B$ اکیداً صعودی است و $f(M) = N$ قطعه ای از B است.

حال فرض کنیم که نه A با يك قطعه از B همريخت ترتیبی است و نه B با قطعه ای از A . پس مجموعه های $A - M$ و $B - N$ تهی نیستند؛ گيريم p و q به ترتیب کوچکترین عضوهای $A - M$ و $B - N$ هستند. آنگاه باید داشته باشیم $A_p = M \approx N = B_p$. بنابراین p پذیرفتنی است. با این تناقض برهان قضیه ۳ کامل است.

قضیه زیر نتیجه ساده دیگری از قضیه ۱ است.

قضیه ۴. گيريم (A, \leq) و (B, \leq') دو مجموعه خوشترتیب هستند. آنگاه $\text{ord}(A, \leq) < \text{ord}(B, \leq')$ اگر و تنها اگر A با يك قطعه سره B همريخت ترتیبی باشد.

برهان. به عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود.

اکنون نتیجه هایی را که در این بخش به دست آوردیم، در قضیه سه حالتی زیر خلاصه می کنیم.

قضیه ۵. گيريم α و β دو عدد ترتیبی هستند. آنگاه تنها یکی از رابطه های ذیل برقرار است:

$$\alpha < \beta \text{ (الف)}$$

$$\alpha = \beta \text{ (ب)}$$

$$\alpha > \beta \text{ (ج)}$$

تمرین ۲۰۸

۱. نشان دهید $\text{ord}\{1, 2, 3, \dots\} > \text{ord}\{1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots\}$ (مسئله ۳ تمرین ۱۰۸ را ببینید).

۲. حکم زیر را، که در برهان قضیه ۳ عنوان شده است، ثابت کنید: برای هر عضو پذیرفتنی a ، يك عضو یکتای $b \in B$ وجود دارد به قسمی که $A_0 \approx B_0$.

۳. نشان دهید که در برهان قضیه ۳، M ، مجموعه عضوهای پذیرفتنی، يك قطعه A است.

۴. ثابت کنید که تابع $f: M \rightarrow B$ که با $f(a) = b$ ، اگر $A_e \approx B_e$ تعریف شده و در برهان قضیه ۳ عنوان شده است، يك به يك و اکیداً صعودی است و نیز ثابت کنید که $f(M)$ يك قطعه B است.

۵. قضیه ۴ را ثابت کنید.

۶. گیریم k يك عدد طبیعی باشد. ثابت کنید

$$\text{ord}\{k, k+1, k+2, \dots\} = \omega \text{ (الف)}$$

$$\text{ord}\{k, k+1, k+2, \dots, 0, 1, 2, 3, \dots, k-1\} > \omega \text{ (ب)}$$

۷. کوچکترین عدد ترتیبی نامتناهی چیست؟

۸. با توجه به برهان قضیه ۳ نشان دهید که برای هر عضو پذیرفتنی a ، يك عضو یکنای $b \in B$ وجود دارد به قسمی که $A_e \approx B_e$.

۳. جمع اعداد ترتیبی

برای هر دو مجموعه خوشترتیب مجزای (A, \leq) و (B, \leq') رابطه 'کلا' مرتب \leq^* را روی $A \cup B$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

(۱) اگر a و b هر دو در A (یا در B) باشند، می نویسیم $a \leq^* b$ اگر و تنها اگر $a \leq b$ (یا $a \leq' b$).

(۲) اگر $a \in A$ و $b \in B$ ، قرار می گذاریم که $a \leq^* b$.

بسادگی دیده می شود که $(A \cup B, \leq^*)$ يك مجموعه خوشترتیب است (مسئله ۲ تمرین ۱۰۸ را ببینید). طبیعی است برای «مجموع» $(A \cup B, \leq^*) + \text{ord}(B, \leq')$ و $\text{ord}(A, \leq)$ ، جنبی احتیاج است: حاصلضربهای دکارتی $A \times \{0\}$ ، $B \times \{1\}$ را تشکیل دهید و در $A \times \{0\}$ رابطه خوشترتیبی \leq_0 را با $(b, 0) \leq_0 (a, 0)$ اگر و تنها اگر در (A, \leq) ، $a \leq b$ تعریف کنید. همچنین، \leq_1 روی $B \times \{1\}$ را با $(d, 1) \leq_1 (c, 1)$ اگر و تنها اگر $c \leq' d$ تعریف کنید. بدیهی است که $(A, \leq) \approx (A \times \{0\}, \leq_0)$ ، $(B, \leq') \approx (B \times \{1\}, \leq_1)$ ، و $(A \cup B, \leq^*) \approx (A \times \{0\}, \leq_0) \cup (B \times \{1\}, \leq_1)$ مجزا نباشند، می توانیم مجموعه های مجزای $(A \times \{0\}, \leq_0)$ و $(B \times \{1\}, \leq_1)$ را به جای (A, \leq) و (B, \leq') به کار ببریم.

تعریف ۳. گیریم α و β اعداد ترتیبی هستند. مجموع ترتیبی $\alpha + \beta$ که با $\alpha + \beta$ نشان داده می شود، عدد ترتیبی $\text{ord}(A \cup B, \leq^*)$ است، که در آن (A, \leq) و (B, \leq')

۱. باید تذکر داد که در $(A \cup B, \leq^*)$ هر عنصر $a \in A$ از هر عنصر $b \in B$ کوچکتر است، و در $(B \cup A, \leq^*)$ هر عنصر $b \in B$ از هر عنصر $a \in A$ کوچکتر است. بنابراین، $(A \cup B, \leq^*)$ و $(B \cup A, \leq^*)$ باید متمایز به حساب آیند.

مجموعه‌های خوشترتیب مجزا، و به قسمی هستند که $\text{ord}(A, \leq) = \alpha$ و $\text{ord}(B, \leq') = \beta$

در مسئله ۱ از خواننده خواسته شده نشان دهد که تعریف مجموع ترتیبی، $\alpha + \beta$ ، از انتخاب مجموعه‌های خوشترتیب A و B مستقل است.

اگر α و β دو عدد ترتیبی متناهی باشند، مجموع ترتیبی $\alpha + \beta$ با مجموع معمولی دو عدد صحیح نامنفی سازگار است. اما، برای اعداد ترتیبی ترامتاهی، ممکن است ویژگیهای مجموع ترتیبی با حالت متناهی خیلی متفاوت باشد: مثلاً، $\alpha + \beta$ ممکن است با $\beta + \alpha$ برابر نباشد (مثال ۲ زیر را ببینید).

مثال ۱. مجموع ترتیبی $5 + 4$ دو عدد ترتیبی متناهی ۴ و ۵ را پیدا کنید.

حل: چون $5 = \text{ord}\{0, 1, 2, 3, 4\}$ و $4 = \text{ord}\{5, 6, 7, 8\}$ داریم
 $4 + 5 = \text{ord}\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 8\} = 9$

مثال ۲. گیریم k یک عدد ترتیبی متناهی ناصفر است. نشان دهید که $k + \omega = \omega$ و $\omega + k \neq \omega$. از این رو، مجموع ترتیبی در حالت کلی جابه‌جایی نیست.

پرهان. چون $k = \text{ord}\{0, 1, \dots, k-1\}$ و $k = \text{ord}\{k, k+1, \dots\}$ داریم

$$k + \omega = \text{ord}\{0, 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots\} = \omega$$

و

$$\omega + k = \text{ord}\{k, k+1, \dots, 0, 1, 2, \dots, k-1\} > \omega$$

از این رو، $\omega + k \neq \omega$ (مسئله ۶ (ب)، تمرین ۲۰۸ را ببینید).

قضیه ۶. گیریم α, β ، و γ اعداد ترتیبی هستند. آنگاه

(الف) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (قانون شرکتپذیری)

(ب) $\beta < \gamma$ نتیجه می‌دهد که $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$

(ج) $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ نتیجه می‌دهد $\beta = \gamma$ (حذف چپ).

پرهان. (الف) را خودتان ثابت کنید.

(ب) فرض کنید (A, \leq) ، (B, \leq') و (C, \leq'') مجموعه‌های خوشترتیب هستند به قسمی که $\text{ord}(A, \leq) = \alpha$ ، $\text{ord}(B, \leq') = \beta$ ، $\text{ord}(C, \leq'') = \gamma$ و $A \cap C = \emptyset$ و $A \cap B = \emptyset$. چون $\beta < \gamma$ بنا بر قضیه ۴، B یا یک قطعه سره C از C همریخت ترتیبی است؛ فرض کنید $g: B \rightarrow C$ این همریختی ترتیبی است، فرض کنید اجتماعهای مجزای $A \cup B$ و $A \cup C$ با رابطه خوشترتیب \leq^* که در اول این بخش

تعریف شد، مرتب شده است. آنگاه، تحت این رابطه‌های خوشترتیبی، تابع

$$f: A \cup B \rightarrow A \cup C$$

که با

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{اگر } x \in A \\ g(x) & \text{اگر } x \in B \end{cases}$$

تعریف شده است، يك همريختی ترتیبی از $A \cup B$ روی قطعهٔ سرة $A \cup C$ از $A \cup C$ است. پس، بنا بر قضیهٔ ۴، $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

(ج) فرض کنید برخلاف حکم اعداد ترتیبی α ، β و γ وجود دارند به قسمی که $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ و $\beta \neq \gamma$. بنا بر قضیهٔ ۵، می‌توانیم فرض کنیم که $\beta < \gamma$ (برای حالت $\beta > \gamma$ به طریق مشابه عمل می‌کنیم). در نتیجه، بنا بر قسمت (ب)، داریم $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ که يك تناقض است.

ارزش دارد متذکر شویم که اگرچه مجموع ترتیبی حذفی چپ است، حذفی راست نیست. یعنی از $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$ الزاماً $\beta = \gamma$ نتیجه نمی‌شود (مسئلهٔ ۴ را ببینید). همچنین، در مقایسه با قضیهٔ ۶ (ب)، از $\beta < \gamma$ ، $\beta + \alpha < \gamma + \alpha$ نتیجه نمی‌شود (مسئله‌های ۵ و ۶ را ببینید).

تمرین ۳۰.۸

۱. گیریم (A_1, \leq_1) ، (A_2, \leq_2) ، (B_1, \leq_1) ، و (B_2, \leq_2) مجموعه‌های خوشترتیب هستند به قسمی که $A_1 \approx A_2$ ، $B_1 \approx B_2$ ، $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ ، $A_2 \cap B_2 = \emptyset$ ، $A_1 \cup B_1 \approx A_2 \cup B_2$ ثابت کنید $(A_1 \cup B_1, \leq_1) \approx (A_2 \cup B_2, \leq_2)$.
۲. نشان دهید که برای هر عدد ترتیبی α ، $\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha$.
۳. ثابت کنید که مجموع ترتیبی شرکبندیر است: برای هر سه عدد ترتیبی α ، β و γ $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
۴. با ارائهٔ يك مثال نقیض نشان دهید که مجموع ترتیبی حذفی راست نیست: اعداد ترتیبی α ، β و γ وجود دارند به قسمی که $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$ اما $\beta \neq \gamma$.
۵. قضیهٔ تغییر یافتهٔ ۶ (ب) را ثابت کنید: اگر α ، β ، و γ اعداد ترتیبی باشند به قسمی که $\beta < \gamma$ ، آنگاه $\beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$ (مسئلهٔ ۶ در زیر را ببینید).
۶. نشان دهید که در مسئله ۵ از $\beta < \gamma$ الزاماً $\beta + \alpha < \gamma + \alpha$ نتیجه نمی‌شود (قضیهٔ ۶ (ب) را ببینید).
۷. ثابت کنید که $\alpha < \beta$ اگر و تنها اگر $\alpha + 1 \leq \beta$.
۸. وارون قضیهٔ ۶ (ب) را ثابت کنید: اگر $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ آنگاه $\beta < \gamma$.
۹. گیریم اعداد ترتیبی α و γ به قسمی هستند که $\alpha \leq \gamma$. ثابت کنید که يك β یکتا وجود

- دارد به قسمی که $\alpha + \beta = \gamma$. [این β را می‌توان با $\gamma + (-\alpha)$ نمایش داد].
۱۰. ثابت کنید که برای هر عدد ترتیبی، $\alpha + 1 > \alpha$.
۱۱. آیا عددی ترتیبی وجود دارد که از هر عدد ترتیبی دیگر بزرگتر باشد؟

۴. ضرب اعداد ترتیبی

در حساب اعداد اصلی، حاصلضرب دو عدد ترتیبی $\text{card } A$ و $\text{card } B$ ، $\text{card}(A \times B)$ تعریف شده است. برای تعریف «حاصلضرب» اعداد ترتیبی (A, \leq) و (B, \leq') نخست باید تصمیم بگیریم که چه رابطه خوشترتیبی روی حاصلضرب دکارتی $A \times B$ تعریف کنیم. طبیعی است که رابطه «القبایی» را که در زیر تعریف می‌کنیم، بر دیگر رابطه‌های ترتیبی ترجیح دهیم.

تعریف ۴. گیریم (A, \leq) و (B, \leq') مجموعه‌های خوشترتیب هستند. آنگاه روی $A \times B$ رابطه القبایی \leq^* به این صورت تعریف می‌شود: (الف) اگر $a < x$ آنگاه برای هر b و y در B ، $(a, b) \leq^*(x, y)$. اگر $a = x$ و $b \leq' y$ آنگاه $(a, b) \leq^*(x, y)$.

قضیه ۷. گیریم (A, \leq) و (B, \leq') مجموعه‌های خوشترتیب هستند. آنگاه رابطه القبایی \leq^* روی $A \times B$ يك رابطه خوشترتیب است.

پروهان. آشکار است که \leq^* يك رابطه کلاً مرتب روی $A \times B$ است. برای اینکه نشان دهیم که این رابطه کلاً مرتب، خوشترتیب است، S را يك زیرمجموعه غیرتهی دلخواهی از $A \times B$ فرض می‌کنیم. ثابت خواهیم کرد که S کوچکترین عنصر دارد. نخست توجه می‌کنیم که مجموعه

$$p_A(S) = \{x \in A \mid (x, y) \in S, y \in B \text{ يك برای يك}\}$$

يك زیرمجموعه غیرتهی از مجموعه خوشترتیب A است و بنابراین يك کوچکترین عنصر، مانند a دارد. حال مجموعه

$$\{y \in B \mid (a, y) \in S\}$$

را در نظر بگیرید که يك زیرمجموعه غیرتهی از مجموعه خوشترتیب B است و از این رو يك کوچکترین عنصر مانند b دارد. حال کاملاً واضح است که عنصر (a, b) در S ، کوچکترین عنصر S است. بنابراین، $(A \times B, \leq^*)$ يك مجموعه خوشترتیب است.

قضیه ۸. گیریم (A_1, \leq_1) ، (A_2, \leq_2) ، (B_1, \leq_1) و (B_2, \leq_2) مجموعه‌های خوشترتیب هستند به قسمی که $(A_2, \leq_2) \approx (A_1, \leq_1)$ و $(B_2, \leq_2) \approx (B_1, \leq_1)$. آنگاه

$$(A_1 \times B_1, \leq'_1) \approx (A_2 \times B_2, \leq'_2)$$

پروهان. گیریم $f: A_1 \rightarrow A_2$ و $g: B_1 \rightarrow B_2$ همریختیهای ترتیبی هستند. به عنوان تمرین به خواننده واگذار می کنیم که نشان دهد تابع

$$f \times g: A_1 \times B_1 \rightarrow A_2 \times B_2$$

که با $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$ برای هر $(x, y) \in A_1 \times B_1$ تعریف شده است، یک همریختی ترتیبی است.

با کمک قضیه های ۷ و ۸ می توانیم حاصلضرب دو عدد ترتیبی را تعریف کنیم.

تعریف ۵. برای هر دو عدد ترتیبی α و β ، حاصلضرب ترتیبی $\beta\alpha$ را با

$$\beta\alpha = \text{ord}(A \times B, \leq^*)$$

تعریف می کنیم، (A, \leq) و (B, \leq') مجموعه های خوشترتیبی هستند به قسمی که $\text{ord}(A, \leq) = \alpha$ ، $\text{ord}(B, \leq') = \beta$ و ترتیب الفبایی $A \times B$ است.

توجه کنید که مطابق با تعریف ۵، $\text{ord}(A \times B, \leq^*)$ ، $\beta\alpha$ است نه $\alpha\beta$. حاصلضرب ترتیبی جا به جایی نیست.

مثال ۳. حاصلضربهای ترتیبی 2ω و $\omega 2$ را با هم مقایسه کنید.

حل: گیریم $(A, \leq) = \{1, 2, 3, \dots\}$ و $(B, \leq') = \{0, 1\}$. بنابراین $\text{ord}(A, \leq) = \omega$ و $\text{ord}(B, \leq') = 2$. گیریم $A \times B$ با ترتیب الفبایی مرتب شده است، در این صورت $2\omega = \text{ord}(A \times B, \leq^*)$. از طرف دیگر تابع $f: A \times B \rightarrow A$ که با

$$f(j, k) = \begin{cases} 2j-1 & \text{اگر } k=0 \\ 2j & \text{اگر } k=1 \end{cases}$$

تعریف شده است، یک همریختی ترتیبی است، پس $2\omega = \omega$.

اکنون، گیریم \leq^{*0} ترتیب الفبایی روی $B \times A$ است، در این صورت $\text{ord}(B \times A, \leq^{*0}) = \omega + \omega = 2\omega$. بررسی $\omega 2$ را به خواننده واگذار می کنیم. بنابراین $\omega 2 \neq 2\omega$.

قضیه ۹. گیریم α, β, γ اعداد ترتیبی هستند. آنگاه

(الف) $(\gamma\beta)\alpha = \gamma(\beta\alpha)$ (قانون شرکتپذیری)

(ب) $\gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta$ (قانون بخشپذیری چپ)

برهان. با خواننده است.

قضیه ۱۰. گیریم α, β, γ اعداد ترتیبی هستند به قسمی که $\gamma > 0$. آنگاه

(الف) $\alpha < \beta$ نتیجه می‌دهد $\gamma\alpha < \gamma\beta$.

(ب) $\gamma\alpha = \gamma\beta$ نتیجه می‌دهد $\alpha = \beta$ (حذف چپ).

برهان. (الف) گیریم $(A, \leq), (B, \leq'), (C, \leq'')$ مجموعه‌های خوشترتیب هستند به قسمی که $\text{ord}(A, \leq) = \alpha, \text{ord}(B, \leq') = \beta, \text{ord}(C, \leq'') = \gamma$. اگر $\alpha < \beta$ ، آنگاه یک عنصر $p \in B$ وجود دارد به قسمی که $A \approx B_p$. گیریم q کوچکترین عنصر C است و $A \times C$ و $B \times C$ با رابطه القایی مرتب شده‌اند. نتیجه می‌شود که $A \times C$ با $B_p \times C$ که با رابطه ترتیبی القایی از $B \times C$ مرتب شده، هم‌ریخت است، و همچنین نتیجه می‌شود که $B_p \times C$ قطعه

$$(B \times C)_{(p,q)} = \{(x, y) \in B \times C \mid (x, y) < ' (p, q)\}$$

از $B \times C$ است. این ثابت می‌کند که $\gamma\alpha < \gamma\beta$.

(ب) برخلاف حکم فرض کنید که اعداد ترتیبی α, β, γ وجود دارند به قسمی که $\gamma\alpha = \gamma\beta$ و $\alpha \neq \beta$. فرض می‌کنیم که $\alpha < \beta$ (حالت $\beta < \alpha$ به طریق مشابه عمل می‌شود). آنگاه، بنابر قسمت (الف) این قضیه، داریم $\gamma\alpha > \gamma\beta$ ، که با $\gamma\alpha = \gamma\beta$ تناقض دارد.

باید توجه شود که اگرچه ضرب ترتیبی از چپ بخشپذیر و از چپ حذفی است، نه از راست بخشپذیر است و نه از راست حذفی (مسئله‌های ۴ و ۹ را ببینید).

تمرین ۴۰۸

۱. برهان قضیه ۸ را کامل کنید.

۲. نشان دهید که

(الف) برای هر عدد ترتیبی $\alpha, \alpha \cdot 1 = \alpha = \alpha \cdot 0$ و $0 \cdot \alpha = 0 = \alpha \cdot 0$

(ب) $\alpha\beta = 0$ ، اگر و تنها اگر $\alpha = 0$ یا $\beta = 0$

۳. درستی حکمهای زیر را تحقیق کنید.

(الف) $\omega\omega = \omega + \omega$

(ب) برای هر عدد ترتیبی متناهی $k \neq 0, k\omega = \omega$

۴. با يك مثال نقیض نشان دهید که ضرب ترتیبی پخشپذیر (است نیست، یعنی

$$(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

الزاماً درست نیست.

۵. ثابت کنید که ضرب ترتیبی پخشپذیر چپ است، یعنی، برای تمام اعداد ترتیبی α, β, γ داریم

$$\gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta$$

۶. ثابت کنید که ضرب ترتیبی شرکتپذیر است: برای تمام اعداد ترتیبی α, β, γ و

$$(\gamma\beta)\alpha = \gamma(\beta\alpha)$$

۷. قضیه زیرین، نظیر قضیه ۱۰ (الف)، را ثابت کنید: اگر α, β, γ به قسمی باشند که

$$\alpha < \beta \text{ و } \gamma > 0, \text{ آنگاه } \alpha\gamma \leq \beta\gamma \text{ (مسئله ۸، در زیر را ببینید).}$$

۸. در مسئله ۷ بالا نشان دهید که از $\alpha < \beta$ و $\gamma > 0$ الزاماً $\alpha\gamma < \beta\gamma$ نتیجه نمی‌شود

(قضیه ۱۰ (الف) را ببینید).

۹. با يك مثال نقیض نشان دهید که ضرب ترتیبی حذفی راست نیست: اعداد ترتیبی

$$\alpha, \beta, \gamma > 0, \text{ وجود دارند به قسمی که } \alpha\gamma = \beta\gamma, \text{ اما } \alpha \neq \beta.$$

۱۰. وارون قضیه ۱۰ (الف) را که در زیر می‌آید ثابت کنید: اگر α, β, γ اعداد

$$\text{ترتیبی باشند به قسمی که } \gamma\alpha < \gamma\beta \text{ و } \gamma > 0 \text{ آنگاه } \alpha < \beta.$$

۵. نتیجه

ممکن است طبیعی به نظر رسد که بعد از ضرب، توان اعداد ترتیبی را تعریف کنیم. اما، ما

آن را برای کتابهای سطح بالاتر می‌گذاریم و در عوض، از تو ترتیب اعداد ترتیبی را

بررسی کرده، و سپس یکبار دیگر اعداد اصلی را، اما این بار از دیدگاه نظریه اعداد

ترتیبی مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

قضیه ۱۱. گیریم α يك عدد ترتیبی اختیاری است. آنگاه مجموعه خوشترتیبی تمام اعداد ترتیبی β

به قسمی که $\beta < \alpha$ ، يك مجموعه خوشترتیب است که عدد ترتیبی آن α است.

پروان. گیریم (A, \leq) مجموعه خوشترتیبی باشد که عدد ترتیبی آن α است.

برای هر عدد ترتیبی β ، با شرط $\beta < \alpha$ و هر مجموعه خوشترتیب (B, \leq') با شرط

$\text{ord}(B, \leq') = \beta$ ، با يك قطعه سره A_0 ، $b \in A$ ، از A همریخت ترتیبی است. از

قضیه ۱ نتیجه می‌شود که عنصر $b \in A$ با عدد ترتیبی β مشخص می‌شود و یکتاست. در

نتیجه تابع خوشتعریف زیر

$$f: \{\beta \mid \beta < \alpha \text{ است}\} \rightarrow A$$

که با $f(\beta) = b$ اگر $\beta = \text{ord}(B, \leq')$ و $B \approx A_0$ ، تعریف می‌شود، وجود دارد.

خواننده می‌تواند به آسانی نشان دهد که تابع f یک هم‌ریختی ترتیبی است. بنابراین، مجموعه $\{\beta | \beta < \alpha\}$ خوشترتیب است و

$$\text{ord } \{\beta | \beta < \alpha\} = \alpha$$

با توجه به قضیه ۱۱، می‌توان عدد ترتیبی α را با مجموعه $\{\beta | \beta < \alpha\}$ یکی در نظر گرفت و به این ترتیب هر عدد ترتیبی را یک مجموعه خوشترتیب (از اعداد ترتیبی) دانست. مثلاً

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \emptyset & \omega + 2 &\equiv \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1\} \\ 1 &\equiv \{0\} & & \cdot \\ 2 &\equiv \{0, 1\} & & \cdot \\ 3 &\equiv \{0, 1, 2\} & & \cdot \\ & \cdot & \omega 2 &\equiv \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \dots\} \\ & \cdot & \omega 2 + 1 &\equiv \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \omega 2\} \\ & \cdot & & \cdot \\ \omega &\equiv \{0, 1, 2, \dots\} & & \cdot \\ \omega + 1 &\equiv \{0, 1, 2, \dots, \omega\} & & \cdot \end{aligned}$$

قضیه ۱۲. هر مجموعه از اعداد ترتیبی خوشترتیب است.

برهان. برخلاف حکم فرض کنید که یک مجموعه A از اعداد ترتیبی وجود دارد که خوشترتیب نیست. بنابراین یک زیرمجموعه A مانند B وجود دارد که کوچکترین عنصر ندارد. در نتیجه، مجموعه B شامل یک دنباله نامتناهی اکیداً نزولی از اعداد ترتیبی $\dots > \alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$ است. این دنباله در $\{\beta | \beta < \alpha_1\}$ واقع است، و بنابراین، مجموعه $\{\beta | \beta < \alpha_0\}$ خوشترتیب نیست، و این قضیه ۱۱ را نقض می‌کند. با این تناقض اثبات قضیه کامل است.

عدد ترتیبی را به صورت مجموعه در نظر بگیریم، مثلاً فرض کنیم \mathcal{N} مجموعه تمام اعداد ترتیبی α ی هم‌توان مجموعه \mathbb{N} است (توجه کنید که هر α یک مجموعه \mathbb{N} مجموعه اعداد طبیعی است). این مجموعه اعداد زیر را شامل است:

$$\omega, \omega + 1, \dots, \omega 2, \omega 2 + 1, \dots, \omega 3, \omega 3, \dots, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{(\omega^\omega)}, \dots, \omega^\omega, \dots$$

بنابر قضیه ۱۲، مجموعه \mathcal{N} خوشترتیب است، و بنابراین کوچکترین عدد ترتیبی یک‌کای

همتان N وجود دارد. این عدد را عدد ترتیبی آغازی مجموعه N می‌نامند (به آسانی دیده می‌شود که ω عدد ترتیبی آغازی N است). به طور کلی، بنا بر اصل خوشترتیبی و قضیه ۱۲، هر مجموعه X يك عدد ترتیبی آغازی (یکتا) دارد. عددهای ترتیبی آغازی در اصل موضوعهای الف-۱ تا الف-۴ اعداد اصلی صدق می‌کنند (بخش ۱ فصل ۶ را ببینید). این راه دیگری برای تعریف اعداد اصلی به وجود می‌آورد. در واقع بعضی از نویسندگان نخست اعداد ترتیبی را مطرح می‌کنند و سپس عدد اصلی مجموعه را عدد ترتیبی آغازی آن مجموعه تعریف می‌کنند. از نظر منطقی بهتر است اعداد اصلی را به صورت اعداد ترتیبی آغازی تعریف کنیم، اما از نظر آموزشی و عملی، ترجیح دادیم اعداد اصلی را پیش از اعداد ترتیبی مطرح کنیم.

در قضیه ۱۲، دقت کردیم که از عبارت «مجموعه اعداد ترتیبی» اجتناب کنیم. همانند پارادوکس راسل، فرض وجود این مجموعه به تناقض می‌انجامد، این تناقض به پارادوکس بورالی-فورتی* مشهور است.

قضیه ۱۳. مجموعه تمام اعداد ترتیبی وجود ندارد.

پرهان. برخلاف حکم، فرض کنیم که S ، مجموعه تمام اعداد ترتیبی وجود دارد. بنا بر قضیه ۱۲، S خوشترتیب است. عدد ترتیبی S ، که آن را σ می‌نامیم، باید يك عضو S باشد. از قضیه‌های ۱۱ و ۲ نتیجه می‌شود که:

$$\sigma = \text{ord} \{ \beta \in S \mid \beta < \sigma \} = \text{ord } S_0 < \text{ord } S = \sigma$$

که يك تناقض است.

پرهان دیگر. گیریم S و σ مانند بالا تعریف شده‌اند. آنگاه σ بزرگترین عدد ترتیبی است که با رابطه $\sigma + 1 < \sigma$ تناقض دارد (مسئله ۱۰، تمرین ۳۰۸ را ببینید).

تمرین ۵۰۸

۱. ثابت کنید که تابع $f: \{ \beta \mid \beta < \alpha \} \rightarrow A$ ، که در پرهان قضیه ۱۱ آمده است (و به قسمی است که $f(\beta) = b$ ، هرگاه برای يك مجموعه خوشترتیب (B, \leq') ، $B \approx A_\beta$ و $\beta = \text{ord}(B, \leq')$ هر یخنی ترتیبی است.
۲. ثابت کنید که ω ، عدد ترتیبی آغازی N است.
۳. نشان دهید که هر مجموعه يك عدد ترتیبی آغازی یکتا دارد.
۴. گیریم X و Y مجموعه هستند. ثابت کنید $X \sim Y$ اگر و تنها اگر عدد ترتیبی آغازی X و Y یکی باشند.
۵. گیریم X و Y مجموعه هستند. ثابت کنید $\text{card } X < \text{card } Y$ اگر و تنها اگر عدد ترتیبی آغازی X کوچکتر از عدد ترتیبی آغازی Y باشد.

* Burali-Forti paradox

ضمیمه

اصول موضوع پنانو برای اعداد طبیعی

برای ساختن دستگاه اعداد صحیح، دستگاه اعداد گویا، دستگاه کلاسهای همنهشتی سه پیمانۀ یک عدد صحیح، و غیره از دستگاه اعداد طبیعی $1, 2, 3, \dots$ شروع می‌کنیم. واقعاً اعداد طبیعی چه هستند؟ جوزپه پنانو* (1858-1932) با پنج اصل موضوع، که اصول موضوع پنانو برای اعداد طبیعی نامیده می‌شوند، به این سؤال پاسخ داد.^۱

اصول موضوع پنانو برای اعداد طبیعی. مجموعه‌ای مانند \mathbf{N} که در اصلهای موضوع زیر صدق کند وجود دارد؛ عنصرهای \mathbf{N} را اعداد طبیعی می‌نامند.

۱. یک عنصر ویژه در \mathbf{N} وجود دارد که با 1 نمایش داده می‌شود.
۲. برای هر عنصر $n \in \mathbf{N}$ ، یک عنصر یکنای n^+ ، به نام تالی n ، در \mathbf{N} وجود دارد.
۳. برای هر $n \in \mathbf{N}$ ، $n^+ \neq 1$.
۴. اگر $n, m \in \mathbf{N}$ و $n^+ = m^+$ ، آنگاه $n = m$.
۵. اگر \mathbf{P} زیر مجموعه‌ای از \mathbf{N} باشد به قسمی که $1 \in \mathbf{P}$ ، و از $n \in \mathbf{P}$ نتیجه شود $n^+ \in \mathbf{P}$ ، آنگاه $\mathbf{P} = \mathbf{N}$.

مناسبتی است که به جای n^+ ، تالی n ، بنویسیم $n+1$ ، و می‌نویسیم $1+1=2$ ،
 $2+1=3$ ، $3+1=4$ ، ...
 اصل موضوع ۵، اساس استقرای ریاضی است. جمع اعداد طبیعی به صورت استقرایی با

• Guiseppi Peano

۱. نگاه کنید به:

Peano, *Arithmetices Principia*, Bocca, Turin, 1889.

اصول موضوع پتانو برای اعداد طبیعی ۱۸۳

$$1 + y = y^+ \quad (۱)$$

$$x^+ + y = (x + y)^+ \quad (۲)$$

تعریف می‌شود. با به‌کار بردن (۱)، (۲) و استقرای ریاضی، ویژگی‌های اساسی جمع اعداد طبیعی که در زیر می‌آیند، ثابت می‌شوند:

$$(x + (y + z)) = (x + y) + z \quad (۳) \text{ (قانون شرکتپذیری)}$$

$$x + y = y + x \quad (۴) \text{ (قانون جابه‌جایی)}$$

$$x + z = y + z \quad (۵) \text{ نتیجه می‌دهد } x = y \text{ (قانون حذف)}$$

فقط (۳) را ثابت خواهیم کرد و (۴) و (۵) را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

برهان (۳). گیریم y و z دو عضو دلخواه N هستند که در طول این برهان ثابت می‌مانند. برای اثبات (۳) با استقرای ریاضی، نخست نشان می‌دهیم که

$$1 + (y + z) = (1 + y) + z$$

برهان این قسمت مرحله به مرحله در زیر آمده است:

$$\text{بنابر (۱)} \quad 1 + (y + z) = (y + z)^+$$

$$\text{بنابر (۲)} \quad = y^+ + z$$

$$\text{بنابر (۱)} \quad = (1 + y) + z$$

پس، قانون شرکتپذیری (۳) برای $x = 1$ معتبر است و نخستین شرط استقرای ریاضی ثابت شد. هدف بعدی ما آنست نشان دهیم که از فرض

$$k + (y + z) = (k + y) + z \quad (\text{فرض استقرا})$$

رابطه زیر نتیجه می‌شود

$$k^+ + (y + z) = (k^+ + y) + z.$$

داریم

$$\text{بنابر (۲)} \quad k^+ + (y + z) = [k + (y + z)]^+$$

$$\text{بنابر فرض استقرا} \quad = [(k + y) + z]^+$$

$$\text{بنابر (۲)} \quad = (k + y)^+ + z$$

$$\text{بنابر (۲)} \quad = (k^+ + y) + z$$

که مطلوب ماست. برهان (۳) اکنون با استقرای ریاضی کامل است.

ضرب اعداد طبیعی به صورت استقرایی با:

$$1y = y \quad (۶)$$

$$x^+y = xy + y \quad (۷)$$

تعریف می‌شود. ویژگیهای اساسی ضرب که در زیر می‌آیند از (۶) و (۷) با روش استقرای ریاضی نتیجه می‌شوند:

$$x(yz) = (xy)z \quad \text{(قانون شرکتپذیری)} \quad (۸)$$

$$xy = yx \quad \text{(قانون جا به جایی)} \quad (۹)$$

$$xz = yz \quad \text{نتیجه می‌دهد } x = y \quad \text{(قانون حذف)} \quad (۱۰)$$

$$x(y+z) = xy + xz \quad \text{(قانون پخشپذیری)} \quad (۱۱)$$

ویژگیهای (۸)، (۹) و (۱۰) در ضرب به ترتیب به ویژگیهای (۳)، (۴)، و (۵) در جمع شباهت دارند. برهانهای (۸)، (۹) و (۱۰) همانند برهانهای (۳)، (۴) و (۵) هستند و لذا آوردن این برهانها هم به خواننده واگذار می‌شود. قانون پخشپذیری را ثابت می‌کنیم.

برهان (۱۱). فرض می‌کنیم y و z دو عضو دلخواه \mathbb{N} و در طول این برهان ثابت هستند. با استقرای ریاضی روی x ، (۱۱) را ثابت می‌کنیم. در حالت $x = 1$ ، بنا بر (۶)، بدیهی است که

$$1(y+z) = 1y + 1z$$

پس، نخستین قسمت استقرای ریاضی ثابت شد. برای کامل کردن اثبات، فرض می‌کنیم که

$$k(y+z) = ky + kz$$

برای يك $k \in \mathbb{N}$ راست است. آنگاه

$$\text{بنا بر (۷)} \quad k^+(y+z) = k(y+z) + (y+z)$$

$$\text{بنا بر فرض استقرا} \quad = (ky + kz) + (y+z)$$

$$\text{بنا بر (۳)} \quad = ky + [kz + (y+z)]$$

$$\text{بنا بر (۳)} \quad = ky + [(kz + y) + z]$$

$$\text{بنا بر (۴)} \quad = ky + [(y + kz) + z]$$

اصول موضوع پتانو برای اعداد طبیعی ۱۸۵

$$\text{بنابر (۳)} \quad = ky + [y + (kz + z)]$$

$$\text{بنابر (۳)} \quad = (ky + y) + (kz + z)$$

$$\text{بنابر (۷)} \quad = k^+y + k^+z$$

پس، بنابر استقرای ریاضی، (۱۱) راست است.

مفهوم ترتیب در \mathbb{N} را می‌توان به صورت زیر معرفی کرد:

$$(۱۲) \quad x > y \text{ اگر و تنها اگر } z \in \mathbb{N} \text{ وجود داشته باشد به قسمی که } x = y + z$$

از این تعریف ترتیب، نتیجه می‌شود که

$$(۱۳) \quad x > y \text{ و } y > z \text{ نتیجه می‌دهد } x > z \text{ (قانون تعدی)}$$

و

$$(۱۴) \quad \text{برای هر } x, y \text{ در } \mathbb{N}, \text{ یکی و فقط یکی از حکمهای زیر درست است:}$$

$$y > x, \quad x = y, \quad x > y \text{ (قانون سه‌گانگی)}$$

در حقیقت، تمام ویژگیهای شناخته شده اعداد طبیعی از اصول موضوع پتانو مشتق می‌شوند. این ضمیمه را با قضیه زیر که نشان می‌دهد دستگاه اعداد طبیعی یکناست، به پایان می‌رسانیم.

قضیه. گیریم N و N' دو مجموعه هستند که در اصول موضوع ۱ تا ۵ پتانو صدق می‌کنند. آنگاه يك تناظر يك به يك (به نام همربختی) $f: N \rightarrow N'$ وجود دارد به قسمی که $f(1) = 1'$ و $f(n+1) = f(n) + 1'$ ، در اینجا $1'$ عنصر ویژه N' است که در ۱-۵ صدق می‌کند.

پاسخ مسائل برگزیده

تمرین ۱۰۱

۱. هست ۲. هست ۳. نیست ۴. هست ۵. نیست ۶. نیست ۷. نیست
 ۸. نیست ۹. هست ۱۰. هست ۱۱. ۲۰، ۱۶، ۸، ۲۰، ۲ⁿ

۲۱.

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

تمرین ۲۰۱

۱۳. به ۱۴. به ۱۵. (۲) و (۵)، (۷) و (۸)، (۹) و (۱۰)، (۱۱) و (۱۲)
 ۱۹. به ۲۰. به ۲۱. $\sim p \wedge \sim q$

تمرین ۳۰۱

۸. نه این تابع مشتق دارد نه من احمق هشتم.

پاسخ مسائل برگزیده ۱۸۷

$$\sim(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \equiv \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \sim p_3 \vee \dots \vee \sim p_n \text{ (الف) } ۱۰$$

$$\sim(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots \vee p_n) \equiv \sim p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \sim p_3 \wedge \dots \wedge \sim p_n \text{ (ب) } ۱۱$$

$$۱۲. \text{ بله } ۱۸. p \wedge q \wedge r \quad ۱۹. \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$$

تمرین ۴.۱

۳. از جدول ارزش:

	p	\wedge	$\sim q$	\rightarrow	c	\leftrightarrow	p	\rightarrow	q
	T	F	F	T	F	T	T	T	T
	T	T	T	F	F	T	T	F	F
	F	F	F	T	F	T	F	T	T
	F	F	T	T	F	T	F	T	F
مرحله	۱	۳	۲	۴	۱	۵	۱	۲	۱

نتیجه می‌گیریم که $p \wedge \sim q \rightarrow c$ و $p \rightarrow q$ هم‌ارز هستند.

تمرین ۵.۱

$$\begin{aligned}
 & \text{تعریف } \rightarrow & p \wedge (p \rightarrow q) & \equiv p \wedge \sim(p \wedge \sim q) & ۱. \\
 & \text{دمورگن، نفی مضاعف} & & \equiv p \wedge (\sim p \vee q) \\
 & \text{پخشپذیری} & & \equiv (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \\
 & p \wedge \sim p \equiv c & & \equiv c \vee (p \wedge q) \\
 & \text{جابه‌جایی، قضیه ۷ (ب)} & & \equiv p \wedge q \\
 & \text{اختصار} & & \Rightarrow q \\
 & \text{تعریف } \rightarrow & (p \wedge \sim q \rightarrow c) & \Leftrightarrow \sim[(p \wedge \sim q) \wedge \sim c] & ۳. \\
 & \text{دمورگن، نفی مضاعف} & & \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \vee c \\
 & \text{قضیه ۷ (ب)} & & \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \\
 & \text{تعریف } \rightarrow & & \Leftrightarrow (p \rightarrow q)
 \end{aligned}$$

۰۴ $(p \vee q \vee r) \wedge \sim r \wedge \sim q \Leftrightarrow [(p \vee q \vee r) \wedge \sim r] \wedge \sim q$ شرکتپذیری

مثال ۶ $\Rightarrow (p \vee q) \wedge \sim q$

مثال ۶ $\Rightarrow p$

تعریف $c \Leftrightarrow p \wedge \sim p$ ۰۵

اختصار $\Rightarrow p$

تعریف $(p \vee q \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim [(p \vee q) \wedge \sim q]$ ۰۷

دمورگن، نفی مضاعف $\Leftrightarrow \sim (p \vee q) \vee q$

دمورگن، جا به جایی $\Leftrightarrow q \vee (\sim p \wedge \sim q)$

بخشپذیری $\Leftrightarrow (q \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim q)$

جا به جایی، $q \vee \sim q \equiv t$ $\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge t$

قضیه ۷ (الف) $\Leftrightarrow \sim p \vee q$

دمورگن، نفی مضاعف $\Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$

تعریف $\Leftrightarrow (p \rightarrow q)$

مسئله ۸ $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)$ ۰۹

جا به جایی $\Leftrightarrow (r \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim q)$

بخشپذیری $\Leftrightarrow r \vee (\sim p \wedge \sim q)$

دمورگن، جا به جایی $\Leftrightarrow \sim (p \vee q) \vee r$

مسئله ۸ $\Leftrightarrow (p \vee q \rightarrow r)$

مسئله ۸ $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ ۰۱۱

بخشپذیری $\Leftrightarrow \sim p \vee (q \wedge \sim q)$

$q \wedge \sim q \equiv c$ $\Leftrightarrow \sim p \vee c$

قضیه ۷ (ب) $\Leftrightarrow \sim p$

مسئله ۸ $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r)$ ۰۱۲

شرکتپذیری، جا به جایی $\Leftrightarrow (\sim p \vee \sim p) \vee (q \vee r)$

خودتوانی	$\Leftrightarrow \sim p \vee (q \vee r)$	
مسئله ۸	$\Leftrightarrow (p \rightarrow q \vee r)$	
	$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \wedge (p \rightarrow q)$	۰۱۶
تعریف ۴، دمو رگن	$\Leftrightarrow [\sim p \vee (q \rightarrow r)] \wedge (\sim p \vee q)$	
پخش پذیری	$\Leftrightarrow \sim p \vee [(q \rightarrow r) \wedge q]$	
قیاس استثنایی، مسئله ۵، تمرین ۴۰۱	$\Rightarrow \sim p \vee r$	
	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\sim q \vee \sim s)$	۰۲۰
$\sim q \vee \sim s \equiv q \rightarrow \sim s$	$\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (q \rightarrow \sim s)$	
جا به جایی، شرکت پذیری	$\Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim s)] \wedge (r \rightarrow s)$	
تعدی، عکس نقیض	$\Rightarrow (p \rightarrow \sim s) \wedge (\sim s \rightarrow \sim r)$	
تعدی	$\Rightarrow p \rightarrow \sim r$	
تعریف ۴، دمو رگن	$\Leftrightarrow \sim p \vee \sim r$	

تمرین ۶۰۱

۶. با گذاشتن $\sim P(x)$ به جای $q(x)$ در $(\exists x)(\sim q(x)) \equiv \sim[(\forall x)(q(x))]$ داریم

$$\sim[(\forall x)(\sim p(x))] \equiv (\exists x)(p(x))$$

با نفی هر دو طرف هم ارزی بالا و تعویض طرف چپ و راست، نتیجه می گیریم

$$\sim[(\exists x)(p(x))] \equiv (\forall x)(\sim p(x))$$

تمرین ۷۰۱

۵. (الف) برهان مستقیم:

$$A \vee (B \wedge C) \quad ۰۱$$

$$B \rightarrow D \quad ۰۲$$

$$C \rightarrow E \quad ۰۳$$

$$D \wedge E \rightarrow F \quad ۰۴$$

$$\sim A / \therefore F \quad ۰۵$$

- | | |
|---------------------------|--|
| ۵، ۱، رفع مؤلفه | $B \wedge C$.۶ |
| ۳، ۲، قیاس ذوالوجهین موجب | $B \wedge C \rightarrow D \wedge E$.۷ |
| ۶، ۷، قیاس استثنایی | $D \wedge E$.۸ |
| ۸، ۴، قیاس استثنایی | F .۹ |

(ب) برهان غیرمستقیم:

- | | |
|---------------------------|--|
| برهان خلف | $\sim F$.۶ |
| ۶، ۴، قیاس دفع | $\sim(D \wedge E)$.۷ |
| ۵، ۱، رفع مؤلفه | $B \wedge C$.۸ |
| ۳، ۲، قیاس ذوالوجهین موجب | $B \wedge C \rightarrow D \wedge E$.۹ |
| ۸، ۹، قیاس استثنایی | $D \wedge E$.۱۰ |
| ۷، ۱۰، عطف | $(D \wedge E) \wedge \sim(D \wedge E)$.۱۱ |

۶. (الف) برهان مستقیم:

- | | |
|---------------------|---|
| | $B \vee (C \rightarrow E)$.۱ |
| | $B \rightarrow D$.۲ |
| | $\sim D \rightarrow (E \rightarrow A)$.۳ |
| | $\sim D / \therefore C \rightarrow A$.۴ |
| ۴، ۲، قیاس دفع | $\sim B$.۵ |
| ۵، ۱، رفع مؤلفه | $C \rightarrow E$.۶ |
| ۴، ۳، قیاس استثنایی | $E \rightarrow A$.۷ |
| ۷، ۶، تعدی | $C \rightarrow A$.۸ |

(ب) برهان غیرمستقیم:

- | | |
|-----------------------|----------------------------|
| برهان خلف | $\sim(C \rightarrow A)$.۵ |
| ۵، تعریف ۴، نفی مضاعف | $C \wedge \sim A$.۶ |
| ۶، اختصار | $\sim A$.۷ |

پاسخ مسائل برگزیده ۱۹۱

۴، ۳، قیاس استثنایی	$E \rightarrow A$.۸
۸، ۷، قیاس دفع	$\sim E$.۹
۴، ۲، قیاس دفع	$\sim B$.۱۰
۱۰، ۱، رفع مؤلفه	$C \rightarrow E$.۱۱
۶، اختصار	C .۱۲
۱۲، ۱۱، قیاس استثنایی	E .۱۳
۹، ۱۳، عطف	$E \wedge \sim E$.۱۴

۱۰. (الف) برهان مستقیم:

۱، جا به جایی، تفکیک دو مقدم	$A \wedge B \rightarrow C$.۱
۲، ۴، تعدی	$(A \rightarrow C) \rightarrow D$.۲
۳، تعریف ۴، دمورگن	$\sim B \vee E / \therefore B \rightarrow D \wedge E$.۳
۵، ۶، قیاس ذالوجهین موجب	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$.۴
۷، قانون خودتوانی	$B \rightarrow D$.۵
	$B \rightarrow E$.۶
	$B \wedge B \rightarrow D \wedge E$.۷
	$B \rightarrow D \wedge E$.۸

۱۱.

۴، ۳، قیاس استثنایی	$P \wedge C \rightarrow R$.۱
۵، ۶، رفع مؤلفه	$R \rightarrow G$.۲
	$H \rightarrow \sim I$.۳
	H .۴
	$\sim G \vee I / \therefore \sim (P \wedge C)$.۵
	$\sim I$.۶
	$\sim G$.۷

۷،۲ قیاس دفع

$\sim R$.۸

۸،۱ قیاس دفع

$\sim(P \wedge C)$.۹

.۱۳

$W \vee H \rightarrow L \wedge S$.۱

$\sim S / \therefore \sim H$.۲

۲، جمع

$\sim S \vee \sim L$.۳

۳، جا به جایی، دمو رگن

$\sim(L \wedge S)$.۴

۴،۱ قیاس دفع

$\sim(W \vee H)$.۵

۵، دمو رگن

$\sim W \wedge \sim H$.۶

۶، اختصار

$\sim H$.۷

.۱۴

$E \wedge S \rightarrow G$.۱

$G \rightarrow H$.۲

$\sim H / \therefore \sim E \vee \sim S$.۳

۳،۲ قیاس دفع

$\sim G$.۴

۴،۱ قیاس دفع

$\sim(E \wedge S)$.۵

۵، دمو رگن

$\sim E \vee \sim S$.۶

.۱۵

$P \rightarrow \sim B$.۱

$F \rightarrow T$.۲

$O \rightarrow \sim S$.۳

$\sim B \rightarrow F$.۴

$G \rightarrow P$.۵

$\sim S \rightarrow \sim T / \therefore O \rightarrow \sim G$.۶

۳، ۶، تعدی	$O \rightarrow \sim T$.۷
۱، ۵، تعدی	$G \rightarrow \sim B$.۸
۴، ۸، تعدی	$G \rightarrow F$.۹
۲، ۹، تعدی	$G \rightarrow T$.۱۰
۱۰، عکس نقیض	$\sim T \rightarrow \sim G$.۱۱
۷، ۱۱، تعدی	$O \rightarrow \sim G$.۱۲

تمرین ۸۰۱

۱. این قضیه را با استقرای ریاضی روی n ثابت می‌کنیم. قضیه به سادگی برای $n=1$ دیده می‌شود. فرض استقرا آنست که k عدد صحیحی است که برای تمام r های $0 \leq r \leq k$

$$C(k, r) = \frac{k!}{r!(k-r)!}$$

حال $C(k+1, r)$ را در نظر بگیرید. بنا بر تعریف ۷ و فرض استقرا داریم

$$\begin{aligned} C(k+1, r) &= C(k, r) + C(k, r-1) \\ &= \frac{k!}{r!(k-r)!} + \frac{k!}{(r-1)!(k-r+1)!} \\ &= \frac{k!(k-r+1)}{r!(k-r)!(k-r+1)} + \frac{k!r}{r(r-1)!(k-r+1)!} \\ &= \frac{k!(k+1)}{r!(k-r+1)!} \\ &= \frac{(k+1)!}{r!(k+1-r)!} \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد قضیه برای $k+1$ درست است اگر برای k درست باشد. اکنون برهان بنا بر اصل استقرای ریاضی کامل است.

۲. قضیه ۸ می‌تواند برای این مسئله به کار رود. اگر استقرای ریاضی به کار می‌رود، نخست لم زیر را با استقرای ریاضی ثابت کنید.

لم. اگر n عدد صحیح نامنفی و r یا کمتر از صفر یا بزرگتر از n باشد، آنگاه $C(n, r) = 0$.

تمرین ۱۰۲

$D \subseteq A \subseteq B \subseteq C$.۲

۵. فرض کنید $A \subseteq \emptyset$ ، آنگاه برای هر عنصر x ، $(x \in A) \rightarrow (x \in \emptyset)$ يك گزاره راست است. چون $x \in \emptyset$ دروغ است، برای اینکه گزاره شرطی $(x \in A) \rightarrow (x \in \emptyset)$ راست باشد، باید برای تمام عنصرهای $x \in A$ دروغ باشد. پس، باید داشته باشیم $A = \emptyset$.

۶. الف) درستی عبارت زیر را بررسی می کنیم:

برای هر عنصر x $(A \subseteq B)$ فرض $(x \in A) \rightarrow (x \in B)$ ۱.
برای بعضی از عنصرهای y $(y \in B) \wedge (y \notin A)$ ۲.

برای هر عنصر x $(B \subseteq C)$ فرض $(x \in B) \rightarrow (x \in C)$ ۳.

$\therefore ACC$ / (نتیجه)

برای هر عنصر x $(x \in A) \rightarrow (x \in C)$ ۴. ۱، ۳، تعدی

$y \in B$ ۵. ۲، اختصار

$y \notin A$ ۶. ۲، اختصار

$y \in C$ ۷. ۳، ۵، قیاس استثنایی

برای بعضی عناصر y $(y \in C) \wedge (y \notin A)$ ۸. ۶، ۷، ترکیب عطفی

ACC ۹. ۲، ۸، تعریف C

۸. الف) دروغ (ب) دروغ (ج) دروغ

(د) دروغ (ه) دروغ (و) راست

۹. الف) دروغ (ب) دروغ (ج) راست (د) راست (ه) دروغ

۱۰. الف) دروغ (ب) راست (ج) دروغ (د) راست

۱۱. باید این را با استقرای ریاضی روی n ثابت کنیم. چون

$$C(1, r) = \begin{cases} 1 & r = 0, 1 \\ 0 & r \neq 0, 1 \end{cases}$$

پس مطلب برای $n = 1$ درست است. فرض کنید که یک مجموعه با k عنصر داده شده، آنگاه برای هر عدد صحیح r ، دقیقاً $C(k, r)$ زیرمجموعه با r عنصر وجود دارد (فرض استقرا). حال مجموعه دلخواه $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ را با $k+1$ عنصر در نظر بگیرد. زیرمجموعه‌های r عنصری A ، از زیرمجموعه‌های r عنصری $A - \{a_{k+1}\} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ و زیرمجموعه‌های $r-1$ عنصری $A - \{a_{k+1}\}$ که به آنها a_{k+1} افزوده شود تشکیل شده‌اند. بنابراین، بنا بر استقرا ریاضی و تعریف γ از فصل اول، دقیقاً $C(k, r) + C(k, r-1) = C(k+1, r)$ زیرمجموعه A با r عنصر وجود دارد. از این رو، اثبات بنا بر اصل استقرا ریاضی کامل است.

تمرین ۲.۲

۵. $\{x, \{y, z\}\}, \{\{y, z\}\}, \{x\}, \emptyset$

۶. خیر، $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ یک عنصر دارد.

۷. دو عنصر.

۱۲. در نظر داشته باشید که یک مجموعه $X \in \mathcal{P}(A:B)$ اگر و تنها اگر یک مجموعه $Y \in \mathcal{P}(A-B)$ وجود داشته باشد به قسمی که $X = B \cup Y$.
 (الف) بنابراین، تعداد عنصرهای $\mathcal{P}(A:B)$ همانند تعداد عنصرهای مجموعه توانی $\mathcal{P}(A-B)$ است، یعنی 2^{n-m} .
 (ب) اگر $B = \emptyset$ ، آنگاه $\mathcal{P}(A:B) = \mathcal{P}(A)$ ، که $2^n = 2^{n-0}$ عنصر دارد.

تمرین ۳.۲

۱. بدیهی است که $A \cup B \supseteq B$. برای کامل کردن برهان، باقی می‌ماند که نشان داده شود $A \cup B \subseteq B$:

تعریف U $x \in A \cup B \equiv (x \in A) \vee (x \in B)$

$A \subseteq B \Rightarrow (x \in B) \vee (x \in B)$

خودتوانی $\equiv x \in B$

از این رو $A \cup B \subseteq B$ و در نتیجه $A \cup B = B$.

۶. (الف)

۱۰. $(x \in A) \rightarrow (x \in C)$ (فرض $A \subseteq C$)
 ۲۰. $(x \in B) \rightarrow (x \in C) / \therefore A \cup B \subseteq C$ (فرض $B \subseteq C$ / نتیجه)
 ۳۰. $(x \in A) \vee (x \in B) \rightarrow (x \in C) \vee (x \in C)$ ۱، ۲، قیاس ذوالوجهین موجب
 ۴۰. $(x \in A) \vee (x \in B) \rightarrow (x \in C)$ ۳، خودتوانی
 ۵۰. $(x \in A \cup B) \rightarrow (x \in C)$ ۴، تعریف \cup
 ۶۰. $A \cup B \subseteq C$ ۵، تعریف \subseteq

$$C \subseteq (A \cap B) \cup C \quad (۱) \quad ۷.$$

$$\begin{aligned} &= A \cap (B \cup C) \quad (\text{فرض}) \\ &\subseteq A \end{aligned}$$

(۲) گیریم $C \subseteq A$ آنگاه

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \\ &= A \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

پخشپذیری، جا به جایی
مسئله ۱

۱۱. چون $A \subseteq C$ ، پس بنا بر مسئله ۱۰ داریم $A \cup B \subseteq C \cup B$. چون $B \subseteq D$ ، دوباره بنا بر مسئله ۱۰، $A \cup B \subseteq C \cup D$ ، $C \cup B = B \cup C \subseteq D \cup C = C \cup D$ ، از این رو،

تمرین ۴۰۲

$$\begin{aligned} ۱. \quad A - (B \cap A) &= A \cap (B \cap A)' \quad \text{مثال ۵} \\ &= A \cap (B' \cup A') \quad \text{قضیه دمورگن} \\ &= (A \cap B') \cup (A \cap A') \quad \text{پخشپذیری} \\ &= (A \cap B') \cup \emptyset \quad \text{قضیه ۵ (ج)} \\ &= A - B \quad \text{مثال ۵، قضیه ۴ (الف)} \end{aligned}$$

۳. گیریم $B \subseteq A'$. برای هر عنصر x ، اگر $x \in B$ آنگاه $x \in A'$. یعنی $x \notin A$ اگر $x \in B$. پس برای هر x ، بنا بر این $A \cap B = \emptyset$.

پاسخ مسائل برگزیده ۱۹۷

به‌وارون، اگر $A \cap B = \emptyset$ آنگاه $x \in B$ ، $x \notin A'$ را نتیجه می‌دهد. یعنی،
 $B \subseteq A'$ پس $(x \in B) \rightarrow (x \in A')$ راست است.

۶. (۱) اگر $(A-B) \cup B = A$ ، آنگاه $B \subseteq (A-B) \cup B = A$
 (۲) اگر $B \subseteq A$ ، آنگاه

مثال ۵ $(A-B) \cup B = (A \cap B') \cup B$

جا به جایی $= B \cup (A \cap B')$

پخشپذیری $= (B \cup A) \cap (B \cup B')$

(فرض $B \subseteq A$)، مسئله ۱ $= A \cap (B \cup B')$

تمرین ۳.۲

قضیه ۵ (ج) $= A \cap U$

$A \subseteq U$ $= A$

۸. الف) $(A-C) \cup (B-C) = (A \cap C') \cup (B \cap C')$ مثال ۵

جا به جایی $= (C' \cap A) \cup (C' \cap B)$

پخشپذیری $= C' \cap (A \cup B)$

جا به جایی، مثال ۵ $= (A \cup B) - C$

۲۰. فرض $C = A \cup B$ $C - B = (A \cup B) - B$

مثال ۵ $= (A \cup B) \cap B'$

جا به جایی، پخشپذیری $= (A \cap B') \cup (B \cap B')$

مثال ۵، قضیه ۵ (ج) $= (A - B) \cup \emptyset$

فرض $A \cap B = \emptyset$ $= A$

$(A \cup B) - (A \cap B)$ ۲۱.

مثال ۵ $= (A \cup B) \cap (A \cap B)'$

قضیه دومورگن $= (A \cup B) \cap (A' \cup B')$

پخشپذیری $= [(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B']$

$$\text{جا به جایی،} = [(A \cap A') \cup (B \cap A')] \cup [(A \cap B') \cup (B \cap B')]$$

پخش پذیری

$$\text{قضیه ۵ (ج)} = [\emptyset \cup (B \cap A')] \cup [(A \cap B') \cup \emptyset]$$

$$\text{مثال ۵} = (B - A) \cup (A - B)$$

$$\text{جا به جایی} = (A - B) \cup (B - A)$$

۲۲. بنا بر مثال ۵، داریم

$$B \oplus C = (B - C) \cup (C - B) = (B \cap C') \cup (C \cap B')$$

فقط قسمت (ج) را باید ثابت کنیم، اثبات بقیه ساده است. بنا بر تعریف \oplus و قوانین دمورگن، داریم

$$A \oplus (B \oplus C) = A \oplus [(B \cap C') \cup (C \cap B')]$$

$$= \{A \cap [(B \cap C') \cup (C \cap B')]\}' \cup \{A' \cap [(B \cap C') \cup (C \cap B')]\}$$

$$= [A \cap (B \cap C')]' \cap (C \cap B')' \cup [A' \cap B \cap C'] \cup [A' \cap B' \cap C]$$

$$= [A \cap (B' \cup C) \cap (B \cup C')] \cup [A' \cap B \cap C'] \cup [A' \cap B' \cap C]$$

$$= [A \cap B' \cap C'] \cup [A \cap B \cap C] \cup [A' \cap B \cap C'] \cup [A' \cap B' \cap C]$$

$$= [A \cap B' \cap C'] \cup [A' \cap B \cap C'] \cup [A \cap B \cap C] \cup [A' \cap B' \cap C]$$

$$= \{[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] \cap C'\} \cup \{[(A \cap B) \cup (A' \cap B')] \cap C\}$$

$$= [(A \oplus B) \cap C'] \cup [(A' \cup B) \cap (A \cup B') \cap C]$$

$$= [(A \oplus B) \cap C'] \cup \{[(A \cap B') \cup (A' \cap B)]' \cap C\}$$

$$= [(A \oplus B) \cap C'] \cup [(A \oplus B)' \cap C]$$

$$= (A \oplus B) \oplus C$$

تمرین ۶۰۲

$$\{0, 1/99\} \text{ (ج)}$$

$$\{0, 1\} \text{ (ب)}$$

$$\{0\} \text{ (الف) ۰۲}$$

$$\{0\} \text{ (ب)}$$

$$\{-1, 1\} \text{ (الف) ۰۳}$$

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 0\} \text{ (ب)}$$

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x > 1\} \text{ (الف) ۰۴}$$

$$\mathbf{R} \text{ (د)}$$

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 1\} \text{ (ج)}$$

۰.۸ (الف)

$$\begin{aligned} \text{قضیه ۹} \quad (\bigcup_{i=1}^n A_i) \cap (\bigcup_{j=1}^m B_j) &= \bigcup_{j=1}^m (\bigcup_{i=1}^n A_i) \cap B_j \\ \text{جا به جایی} \quad &= \bigcup_{j=1}^m [B_j \cap (\bigcup_{i=1}^n A_i)] \\ \text{قضیه ۹} \quad &= \bigcup_{j=1}^m [\bigcup_{i=1}^n (B_j \cap A_i)] \end{aligned}$$

تمرین ۱۰.۳

۰.۲ $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$ یا $A = B$

۰.۱ $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$

- تعریف $\cap \equiv [(x, y) \in A \times C] \wedge [(x, y) \in B \times D]$
- تعریف $\times \equiv [(x \in A) \wedge (y \in C)] \wedge [(x \in B) \wedge (y \in D)]$
- شرکت پذیری، جا به جایی $\equiv [(x \in A) \wedge (x \in B)] \wedge [(y \in C) \wedge (y \in D)]$
- تعریف $\cap \equiv (x \in A \cap B) \wedge (y \in C \cap D)$
- تعریف $\times \equiv (x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$

از این رو، $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$

۲۱. (۱) اگر $a = c$ و $b = d$ ، آنگاه $\{a\} = \{c\}$ و $\{a, b\} = \{c, d\}$. در نتیجه $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ یا $(a, b) = (c, d)$.

(۲) فرض کنید $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. اگر $a = b$ ، آنگاه جفت مرتب (a, b) همان مجموعه تک عضوی $\{a\}$ است. چون $(a, b) = (c, d)$ داریم $\{a\} = \{c\}$ و $\{a, b\} = \{c, d\}$. در نتیجه $\{a\} = \{c\} = \{a, b\} = \{c, d\}$ و از این رو $a = b = c = d$.

اگر $a \neq b$ ، آنگاه هر دو جفت (a, b) و (c, d) شامل فقط یک مجموعه تک عضوی، به ترتیب $\{a\}$ و $\{c\}$ هستند. از این رو $a = c$. همچنین مجموعه‌های (a, b) و (c, d) فقط شامل یک «مجموعه دو عضوی»، به ترتیب $\{a, b\}$ و $\{c, d\}$ هستند، بنابراین $\{a, b\} = \{c, d\}$. پس $b \in \{c, d\}$ و از این رو $b = d$ زیرا اگر $b = c$ ، آنگاه چون $a = c$ ، پس باید داشته باشیم $a = b$ ، که تناقض است.

تمرین ۲.۳

۳. (الف) برای بعضی $x \in A$ $y \in \text{Im}(\mathcal{R}) \equiv (x, y) \in \mathcal{R}$ تعریف نگاره
 برای بعضی $x \in A$ $\equiv (y, x) \in \mathcal{R}^{-1}$ تعریف \mathcal{R}^{-1}
 $\equiv y \in \text{Dom}(\mathcal{R}^{-1})$ تعریف حوزه

۸. 2^{n^2} ۹. 2^{m^2} ۱۵. راهنمایی: مسئله ۷ (ب) را به کار ببرید.

تمرین ۳.۳

۴. برای بعضی $A \in \mathcal{P}$ $(x, y) \in X/\mathcal{P} \equiv x \in A$ و $y \in A$ تعریف X/\mathcal{P}
 برای بعضی $A \in \mathcal{P}$ $\equiv (x, y) \in A \times A$ تعریف \times
 $\equiv (x, y) \in \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A \times A$ تعریف \cup

۱۱. $(x, y) \in X/(X/\mathcal{E})$

برای بعضی $A \in X/\mathcal{E}$ $\equiv (x, y) \in A \times A$ مسئله ۴

برای بعضی $c \in X$ $\equiv (x, y) \in (c/\mathcal{E}) \times (c/\mathcal{E})$ تعریف X/\mathcal{E}

$\equiv (x, y) \in \mathcal{E}$ قضیه ۳ (ب)

تمرین ۴.۳

۶. (الف) $[5, +\infty)$ (ب) $[-1, 1]$ (ج) \mathbb{R}

۱۱. $2^3, n^m$

۱۲. $2, n$

۱۴. بگیریم $A = \text{Dom}(g)$ و B زیرمجموعه‌ای از Y که شامل $\text{Im}(g)$ است، باشد. نشان دهید $g: A \rightarrow B$ تابع است.

۱۵. بگیریم $(x, y) \in f$. چون f انعکاسی است، $(x, x) \in f$ ، بنابراین باید داشته باشیم $y = x$ زیرا f تابع است. یعنی برای تمام $x \in X$ ، $f(x) = x$ ، یا $f: X \rightarrow X$ تابع همانی $I_X: X \rightarrow X$ است.

۱۶. برای تمام x های در $[0, 1]$ ، $f(x) = 1 - x$

پاسخ مسائل برگزیده ۲۰۱

۱۷. گیریم x عنصری از X باشد. چون $(x, f(x)) \in f \subseteq g$ ، پس $(x, f(x)) \in g$.
یعنی، $g(x) = f(x), \forall x \in X$. بنا بر قضیه ۷، $f = g$.

تمرین ۵.۳

۴. الف) $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$ تعریف ۹ الف)

ب) $\Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$ تعریف ۹ ب)

بنابراین $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

ب) به قسمی که $y = f(x), x \in f^{-1}(B) \Rightarrow y \in f(f^{-1}(B))$ چون
 $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ بنا بر این $y = f(x) \in B, x \in f^{-1}(B)$

۸. برای بعضی $(x, y) \in \mathcal{R}$ $x = p_x(x, y) \Leftrightarrow x \in p_x(\mathcal{R})$

$\Leftrightarrow x \in \text{Dom}(\mathcal{R})$

بنابراین $p_x(\mathcal{R}) = \text{Dom}(\mathcal{R})$. به طریق مشابه، $p_y(\mathcal{R}) = \text{Im}(\mathcal{R})$

۹. الف) $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$

برای بعضی $x \in A \cap f^{-1}(B)$ $y = f(x)$ تعریف ۹ الف)

برای بعضی $x \in A$ و $x \in f^{-1}(B)$ $y = f(x)$ تعریف \cap

$y \in f(A)$ و $y \in B$ تعریف ۹

$y \in f(A) \cap B$ تعریف \cap

از این دو $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

ب) با جایگذاری X به جای A در قسمت الف)، داریم

$f(X \cap f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$

چون $X \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$ تساوی آخر چنین باز نویسی می شود

$f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$

تمرین ۶.۳

۷. X -تصویر $p_x: X \times Y \rightarrow X$ انژکتیو است، هرگاه Y مجموعه تک عضوی باشد.

۱۱. $m!$

۱۲. الف) عبارت $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ همیشه درست است. [به مسئله ۴ الف)، تمرین ۵.۳ نگاه کنید]. بنابراین، اکنون کافی است نشان داده شود $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$: برای هر $x \in f^{-1}(f(A))$ ، داریم $f(x) \in f(A)$. در نتیجه، برای بعضی $x' \in A$ ، $f(x) = f(x')$. چون f انژکتیو است، باید داشته باشیم $x = x'$ ؛ پس $x \in A$ و در نتیجه $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.

۱۶. برای اینکه نشان دهیم f مقارن است، نشان می‌دهیم که از $y = f(x)$ ، $x = f(y)$ نتیجه می‌شود. گیریم $y = f(x)$. آنگاه

$$x = f(f(x)) = f(y)$$

۱۸. به عنوان نتیجه‌ای از قضیه ۱۳، برای $\Gamma = \{1, 2\}$ ، $A_1 = A$ و $A_2 = B$ ، داریم $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

برای اثبات وارون آن، فرض کنیم برای تمام زیرمجموعه‌های A و B از X داشته باشیم $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. برای عنصرهای دلخواه a, b از X و $a \neq b$ ، قرار می‌دهیم $A = \{a\}$ و $B = \{b\}$ ، آنگاه $A \cap B = \emptyset$ و بنابراین

$$\{f(a)\} \cap \{f(b)\} = f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$$

پس $f(a) \neq f(b)$ و بنابراین f یک به یک است.

۱۹. فرض کنیم برای تمام زیرمجموعه‌های X ، مانند A و B ، $f(A - B) = f(A) - f(B)$. آنگاه برای هر دو عنصر a و b از X و $a \neq b$ ، قرار می‌دهیم $A = \{a\}$ و $B = \{b\}$ ، پس $A - B \neq \emptyset$ و از این رو

$$\{f(a)\} - \{f(b)\} = f(A) - f(B) = f(A - B) \neq \emptyset$$

بنابراین $f(a) \neq f(b)$ و در نتیجه f یک به یک است.

۲۰. بله.

تمرین ۷.۳

۶. برای اینکه نشان دهیم f انژکتیو است، گیریم برای هر x و x' در X ، $f(x) = f(x')$. آنگاه با به کار بردن $g \circ f = I_X$ ، داریم

$$x = g \circ f(x) = g \circ f(x') = x'$$

بنابراین، f انژکتیو است. برای اینکه نشان دهیم f سورژکتیو است، $f \circ h = I_Y$ را به کار می‌بریم:

پاسخ مسائل برگزیده ۲۰۳

$$f(X) \supseteq f(h(Y)) = I_Y(Y) = Y \quad h(Y) \subseteq X \quad \text{زیرا}$$

بنابراین، $f(X) = Y$ و f سورژکتیو است. پس، f بیژکتیو است. حال مشاهده کنید که با به کار بردن مسائل ۴ و ۵، داریم

$$g = g \circ I_Y = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = I_X \circ f^{-1} = f^{-1}$$

و

$$h = I_X \circ h = (f^{-1} \circ f) \circ h = f^{-1} \circ (f \circ h) = f^{-1} \circ I_Y = f^{-1}$$

۱۲. (۱) $g \circ f: X \rightarrow Z$ انژکتیو است: گیریم برای بعضی x و x' در X ، داریم $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ ، چون g انژکتیو است، و $g(f(x)) = g(f(x'))$ ، داریم $f(x) = f(x')$. حال انژکتیو بودن f نتیجه می‌دهد که $x = x'$. این ثابت می‌کند که f انژکتیو است.

(۲) برای اینکه نشان دهیم f پوشا است، مشاهده می‌کنیم که

$$g \circ f(X) = g(f(X))$$

$$f \text{ پوشا است} \quad = g(Y)$$

$$g \text{ پوشا است} \quad = Z$$

بنابراین f پوشاست.

(۳) اکنون $g \circ f: X \rightarrow Z$ یک دوسویی است. زیرا

$$\text{قضیه ۱۵} \quad (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}$$

$$\text{مسئله ۵، قضیه ۱۵} \quad = (g \circ I_X) \circ g^{-1}$$

$$\text{مسئله ۴} \quad = g \circ g^{-1}$$

$$\text{مسئله ۵} \quad = I_Z$$

و

$$\text{قضیه ۱۵} \quad (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f$$

$$\text{مسئله ۵، قضیه ۱۵} \quad = f^{-1} \circ (I_Y \circ f)$$

$$\text{مسئله ۴} \quad = f^{-1} \circ f$$

$$\text{مسئله ۵} \quad = I_X$$

پس بنا بر نتایج مسئله ۶، داریم

$$f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$$

تمرین ۱۰۴

۴. اگر جبر بولی دقیقاً سه عضو ۰، ۱، و a داشت، آنگاه سه امکان زیر برای a' وجود داشت:

$$a = (a')' = 0' = 1 \text{ آنگاه } a' = 0 \text{ (یک)}$$

$$a = (a')' = 1' = 0 \text{ آنگاه بنا بر قضیه ۴، } a' = 1 \text{ (دو)}$$

$$a = a \cdot a = a \cdot a' = 0 \text{ آنگاه } a' = a \text{ (سه)}$$

که هر سه حالت به تناقض می انجامد.

۵. اگر $a' = a$ ، آنگاه

$$1 = a + a' = a + a = a = a \cdot a = a \cdot a' = 0$$

که تعریف ۱ (د) را نقض می کند.

$$a + (a \cdot b) = (a \cdot 1) + (a \cdot b) \quad \text{۹. (الف)}$$

$$= a \cdot (1 + b)$$

بنا بر قضیه ۵

$$= a \cdot 1$$

$$= a$$

۱۲. اگر $a + b = 0$ ، آنگاه بنا بر مسئله ۹ (ب)

بنا بر قضیه ۵

$$a = a \cdot (a + b) = a \cdot 0 = 0$$

به روش مشابه، $b = 0$

$$a' + b = a' + (a + b) = (a' + a) + b = 1 + b = 1 \quad \text{۱۵. (الف) \Leftrightarrow (ب)}$$

بنا بر قضیه ۵

$$a = a \cdot 1 = a \cdot (a' + b) = (a \cdot a') + (a \cdot b) \quad \text{(ب) \Leftrightarrow (ج)}$$

$$= 0 + (a \cdot b) = a \cdot b$$

$$a \cdot b' = (a \cdot b) \cdot b' = a \cdot (b \cdot b') = a \cdot 0 = 0 \quad \text{(ج) \Leftrightarrow (د)}$$

$$b = b + 0 = b + (a \cdot b') = (b + a) \cdot (b + b') \quad \text{(د) \Leftrightarrow (الف)}$$

$$= (b + a) \cdot 1 = b + a = a + b$$

تمرین ۲.۴

$$\begin{aligned} x'yz + x'yz' + xy'z + xy'z' &= x'y(z+z') + xy'(z+z') \quad .۷ \\ &= x'y \cdot ۱ + xy' \cdot ۱ \\ &= x'y + xy' \end{aligned}$$

$$xy + zw + x + (x + z' + w)' = (x + xy) + zw + x'zw \quad .۱۱$$

بنابر قانونهای دمورگن

بنابر قانون جذب

بنابر قضیه ۵

$$= x + zw(1 + x')$$

$$= x + zw$$

$$f(x, y, z) = xx' + yy' + zz' \quad .۱۶$$

تمرین ۳.۴

$$\begin{aligned} (x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z &= (x \leftrightarrow y)z + (x \leftrightarrow y)'z' \quad .۳ \\ &= (xy + x'y')z + (xy + x'y')'z' \\ &= (xy + x'y')z + (x' + y')(x + y)z' \\ &= xyz + x'y'z + x'y'z' + xy'z' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z) &= x(y \leftrightarrow z) + x'(y \leftrightarrow z)' \\ &= x(yz + y'z') + x'(yz + y'z')' \\ &= x(yz + y'z') + x'(y' + z')(y + z) \\ &= xyz + x'y'z' + x'y'z + x'y'z \end{aligned}$$

$$(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z = x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z) \quad \text{اذا این دو}$$

$$\begin{aligned} x \oplus (y \oplus z) &= x \oplus (yz' + y'z) \quad .۴ \\ &= x(yz' + y'z)' + x'(yz' + y'z) \\ &= x(yz')'(y'z)' + x'yz' + x'y'z \\ &= x(y' + z)(y + z') + x'yz' + x'y'z \\ &= xy'z' + xyz + x'y'z' + x'y'z \\ &= (xy' + x'y)z' + (xy + x'y')z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x \oplus y)z' + (x' + y)(x + y')z \\
 &= (x \oplus y)z' + (xy' + x'y)'z \\
 &= (x \oplus y)z' + (x \oplus y)'z = (x \oplus y) \oplus z
 \end{aligned}$$

تمرین ۴.۴

۳. این درجریان برهان مسئله ۴، تمرین ۳.۴ اثبات شده است.

$$C = xyz + xyz' + xy'z + x'yz \quad ۴.$$

بنا بر قضیه ۳

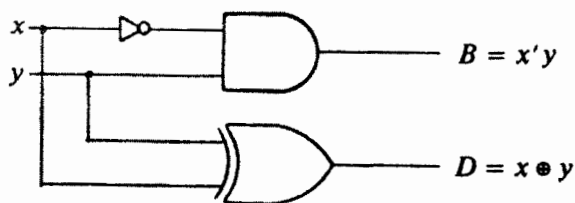
$$\begin{aligned}
 &= xyz + xyz' + xyz + xyz' + xy'z + x'yz \\
 &= (xyz + xyz') + (xyz + xy'z) + (xyz + x'yz) \\
 &= xy(z + z') + xz(y + y') + yz(x + x') \\
 &= xy \cdot 1 + xz \cdot 1 + 1 \cdot yz \\
 &= xy + xz + yz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= xyz + xyz' + xy'z + x'yz \\
 &= xy(z + z') + (xy' + x'y)z \\
 &= xy + (xy' + x'y)z
 \end{aligned}$$

۵. الف) $B = x'y$ و $D = (x' + y')(x + y)$

ب) $D = x'y + xy' = x \oplus y$ و $B = x'y$

۶. ب)



۷. الف) $B = x'y'z + x'yz' + x'yz + xyz$

و

$D = x'y'z + x'yz' + xy'z' + xyz$

توجه کنید که تابع D با تابع S مسئله ۳ یکی است.

$$B = x'(y'z + yz') + (x' + x)yz \quad (\text{ب})$$

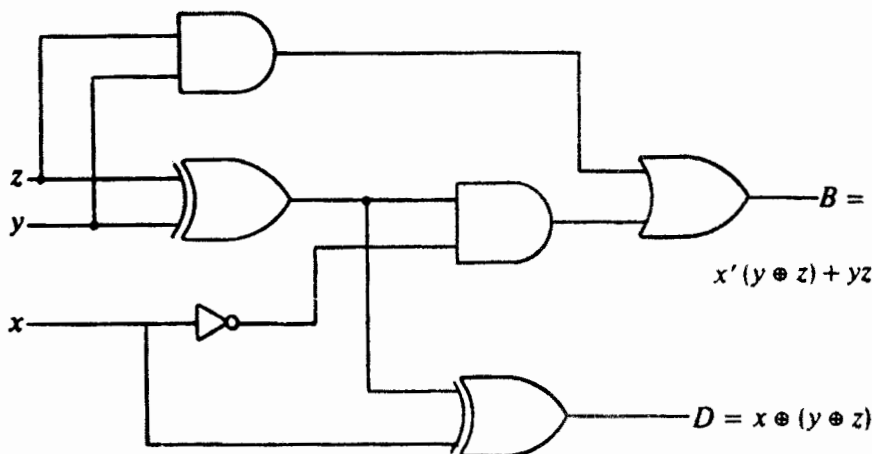
$$= x'(y \oplus z) + yz$$

$D = S$ مسئله ۳

بنابر مسئله ۴، تمرین ۳.۴

$$= (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

۹



تمرین ۱.۵

۲. برخلاف حکم، فرض کنید Y نامتناهی باشد. چون $g^{-1}: Y \rightarrow X$ یک تناظر یک به یک است، پس بنا بر قضیه ۲، مجموعه X باید نامتناهی باشد، که یک تناقض است. بنا بر این، Y منتهی است.

۴. گیریم $f: A \rightarrow A$ یک انزکسیون باشد به قسمی که $f(A) \neq A$. آنگاه تابع $g: A \times A \rightarrow A \times A$ که با $g(x, y) = (f(x), f(y))$ تعریف شده است، یک به یک است، و $g(A \times A) \neq A \times A$. از این رو، $A \times A$ نامتناهی است.

۱۵. اگر $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$ نامتناهی باشد، آنگاه بنا بر مسئله ۱۱، $A - B$ یا $B - A$ نامتناهی است. فرض کنیم $A - B$ نامتناهی باشد، آنگاه مجموعه A ، که یک فوق مجموعه مجموعه نامتناهی $A - B$ است، نامتناهی می شود. عکس این مطلب درست نیست، زیرا اگر $A = B$ یک مجموعه نامتناهی باشد آنگاه $A \oplus B = A \oplus A = \emptyset$ منتهی است.

تمرین ۲۰۵

۰۴. گیریم $f: X \rightarrow Y \sim Y - X$. آنگاه تابع $g: X \rightarrow Y$ را که با

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \in X - Y \\ x & \text{اگر } x \in X \cap Y \end{cases}$$

تعریف می‌شود، در نظر بگیرید. چون

$$Y - X = Y - (X \cap Y) \quad \text{و} \quad X - Y = X - (X \cap Y)$$

پس تابع $g: X \rightarrow Y$ دوسویی است. از این رو $X \sim Y$.

۰۵. گیریم برای هر $\gamma \in \Gamma$ تابع $f_\gamma: X_\gamma \rightarrow Y_\gamma$ را با

$$f(x) = f_\gamma(x) \quad \text{اگر } x \in X_\gamma$$

تعریف کنید. آنگاه چون $\{X_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ و $\{Y_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌های مجموعه‌های مجزا هستند، f یک تابع دوسویی خوشترتیب است.

۰۹. تابع $f: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}^4$ که هر زیرمجموعه B از A را به تابع مشخصه B ، $\chi_B: A \rightarrow \{0, 1\}$ می‌برد آشکارا یک دوسویی است.

۱۰. (۱) نخست ثابت می‌کنیم که h یک به یک است: گیریم $y \in Y$ و x به قسمی باشند که $h(x) = h(y)$ ، یعنی

$$\{1, 2, \dots, g(x)\} \cap g(Y) = \{1, 2, \dots, g(y)\} \cap g(Y) \quad (*)$$

نشان خواهیم داد که $g(x) = g(y)$ و در نتیجه $x = y$. زیرا اگر چنین نباشد بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم فرض کنیم که $g(x) < g(y)$ ، آنگاه تعداد عناصر مجموعه سمت چپ (*) حداقل یکی از تعداد عناصر مجموعه سمت راست (*) کمتر است؛ زیرا اگر $g(x) < g(y)$ ، مجموعه سمت چپ یک زیرمجموعه سمت راست است، و عنصر $g(y)$ در مجموعه سمت راست است اما در مجموعه سمت چپ نیست. این تناقض نشان می‌دهد که $g(x) = g(y)$ و از این رو $x = y$.

(۲) حال نشان می‌دهیم که h پوشا است: زیرا اگر چنین نباشد، آنگاه یک $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به قسمی که $n_0 \notin h(Y)$. بدون از دست دادن کلیت، گیریم n_0 کوچکترین عدد طبیعی با این خاصیت باشد. آنگاه یک $y_0 \in Y$ وجود دارد به قسمی که $h(y_0) = n_0 - 1$ (به راحتی می‌توان نشان داد که $n_0 \neq 1$) گیریم

$$y_1 = \min \{g(z) | g(z) > g(y_0), z \in Y\}$$

نتیجه می شود که

$$h(y_1) = \{1, 2, \dots, g(y_1)\} \cap g(Y) \quad (**)$$

$$= (n_0 - 1) + 1 = n_0$$

زیرا

$$\{1, 2, \dots, g(y_1)\} \cap g(Y) = [\{1, 2, \dots, g(y_0)\} \cap g(Y)] \cup \{g(y_1)\}$$

نتیجه (**). فرض قبلی $n_0 \notin h(Y)$ را نقض می کند. بنابراین h پوشا است.

تمرین ۳.۵

۴. گیریم $f: A \sim N$ و $g: B \sim N$. آنگاه تابع $h: A \times B \rightarrow N \times N$ که با $h(x, y) = (f(x), g(y))$ تعریف می شود، يك دوسویی است. از این رو، $A \times B \sim N \times N$. در نتیجه، بنا بر قضیه ۱۵، شمارای نامتناهی است.

۵. هر عدد گویا را به صورت یکنای p/q ، که در آن $p \in \mathbb{Z}$ ، $q \in \mathbb{N}$ ، و بزرگترین مقسوم علیه مشترك p و q يك است، نشان خواهیم داد. آنگاه تابع $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ که با $f(p/q) = (p, q)$ تعریف می شود، يك انزکسیون است. بدیهی است که $\mathbb{Z} \times \{1\} \subseteq f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. پس بنا بر قضیه ۸، شمارای نامتناهی و در نتیجه شمارای نامتناهی است.

۶. گیریم \mathcal{C} مجموعه تمام دایره هایی در صفحه دکارتی باشد که شعاع و هر دو مختص مرکز آنها گویا باشند. تابع $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ را، که با $f(c) = (x, y, z)$ تعریف می شود و (x, y) مرکز دایره $c \in \mathcal{C}$ و z شعاع آن است، در نظر بگیرید. واضح است که f يك انزکسیون است. بنا بر مثال ۵، $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ و در نتیجه بنا بر قضیه ۱۵، $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. حال $f(\mathcal{C})$ يك زیر مجموعه نامتناهی از مجموعه شمارای نامتناهی $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ است، پس بنا بر قضیه ۸، $f(\mathcal{C})$ شمارای نامتناهی است. از این رو، \mathcal{C} شمارای نامتناهی است.

۷. گیریم $A_1 = B_1$ و برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، $A_{k+1} = B_{k+1} - \bigcup_{j=1}^k A_j$. آنگاه $\{A_k | k \in \mathbb{N}\}$ يك خانواده شمارای نامتناهی از مجموعه های شمارای مجزا است. به علاوه، $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ و $A_1 = B_1$ شمارای نامتناهی است. با استفاده از نتیجه قضیه ۱۵، $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ شمارای نامتناهی، و بنا بر این $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ نیز شمارای نامتناهی است.

۱۰. برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، گیریم A_k مجموعه تمام چندجمله ایهای

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$$

با ضرایب صحیح و $a_0 \neq 0$ باشد. آنگاه هر A_k شمارای نامتناهی است، و بنا بر نتیجه قضیه ۱۰ $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ شمارای نامتناهی است.

۱۲. گریسم A يك مجموعه شمارای نامتناهی، و برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، A_k مجموعه تمام زیرمجموعه‌های متناهی A ، با دقیقاً k عنصر، باشد. آنگاه برای هر $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A_k &\sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N} && (k \text{ بار}) \\ &\sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N} && (k-1 \text{ بار}) \\ &\sim \mathbb{N} \end{aligned}$$

بنا بر نتیجه قضیه ۱۰، مجموعه $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ ، که شامل تمام زیرمجموعه‌های متناهی و غیرتهی A است، شمارای نامتناهی است.

تمرین ۴.۵

۴. به برهان خلف، فرض کنید که مجموعه تمام اعداد ناگو یا بین 0 و 1 شمارای نامتناهی است. چگون مجموعه تمام اعداد گویای بین 0 و 1 شمارای نامتناهی است، اجتماع این دو مجموعه، که مجموعه اعداد حقیقی بین 0 و 1 را تشکیل می‌دهد، باید شمارای نامتناهی باشد. این قضیه ۱۲ را نقض می‌کند. بنابراین، مجموعه تمام اعداد ناگویا بین 0 و 1 ناشماراست.

$$6. \mathbb{R} \sim [0, 2\pi) \sim S^1$$

۱۱. $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$ ناشماراست، پس بنا بر مسئله ۱۰، $A - B$ یا $B - A$ ناشماراست. فرض کنید $A - B$ ناشمارا باشد، پس A به عنوان يك فوق مجموعه آن ناشماراست. عکس این مطلب درست نیست.

تمرین ۱.۶

$$2. 0 = \text{card } \emptyset, \text{ card } \mathbb{N}, \text{ card } \mathbb{R}$$

۵. بله.

تمرین ۲.۶

۲. گرییم a يك عدد اصلی ترامتناهی و A مجموعه‌ای باشد که $\text{card } A = a$. آنگاه A يك مجموعه نامتناهی است، که با توجه به قضیه ۱۱ فصل ۵، شامل يك زیرمجموعه شمارای نامتناهی A است. یعنی $\mathbb{N} \sim B \subseteq A$ ، که نشان می‌دهد $\text{card } \mathbb{N} \leq a$.

۷. مجموعه‌های B و C را در نظر بگیرید. چون $B \sim B \subseteq C$ و $C \sim A \subseteq B$ ، پس بنا بر قضیهٔ شرودر-برنشتاین $C \sim B$. از $A \sim C$ و $C \sim B$ نتیجه می‌شود که $A \sim B$.

تمرین ۳.۶

۲. گیریم $f: A \sim B$. تابع $f: A \rightarrow B$ ، تابع $f^*: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ را، که با $f^*(X) = f(X)$ برای تمام $X \in \mathcal{P}(A)$ تعریف شود، برقراری کند. چون f دوسویی است، پس f^* نیز هست. بنابراین، $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

۳. به برهان خلف فرض کنید که یک مجموعهٔ شمارای نامتناهی A وجود دارد که مجموعهٔ توانی آن، $\mathcal{P}(A)$ شمارای نامتناهی است. آنگاه $\text{card } A = \text{card } \mathcal{P}(A)$ ، که با قضیهٔ کانتور (قضیهٔ ۲) متناقض است.

۵. اگر یک مجموعهٔ \mathcal{U} شامل تمام مجموعه‌ها وجود می‌داشت، آنگاه باید نابرابری $\text{card } \mathcal{U} > A$ برای هر مجموعهٔ A درست باشد. اما مطابق با قضیهٔ کانتور، $\text{card } \mathcal{U} < \text{card } \mathcal{P}(\mathcal{U})$ ، که با نابرابری قبلی در تناقض است. بنابراین مجموعهٔ تمام مجموعه‌ها وجود ندارد.

تمرین ۴.۶

۵. چون $\mathbf{R} \sim (0, 1) \sim (1, 2) \subseteq \mathbf{R}$ و $(0, 1) \subseteq (0, 1) \cup (1, 2) \subseteq \mathbf{R}$ ، پس بنا بر قضیهٔ شرودر-برنشتاین داریم $\mathbf{R} \sim (0, 1) \cup (1, 2)$ ، که نشان می‌دهد $c + c = c$.

۸. مثال نقیض: $2 + \text{card } \mathbf{N} = 3 + \text{card } \mathbf{N}$ اما $2 \neq 3$.

تمرین ۵.۶

۳. مثال نقیض: گیریم $x = 1$ ، $y = z = \aleph_0$. آنگاه $x < y$ ، اما $xz = yz = \aleph_0$ (مثال ۵ ((ج)).

۹. مثال نقیض: $2 \cdot \text{card } \mathbf{N} = 1 \cdot \text{card } \mathbf{N}$ اما $2 \neq 1$.

تمرین ۶.۶

۵. برای هر $n \geq 2$ ، بنا بر قضایای ۸ و ۱۰ عبارت $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$ داریم
 $c = 2^{\aleph_0} \leq n^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$

پس $n^{\aleph_0} = c = \aleph_0^{\aleph_0}$.

۸. بنا بر مثال ۶ داریم $c \leq \aleph_0 \cdot c \leq cc = c$. از این رو $\aleph_0 \cdot c = c$.

تمرین ۷.۶

۲. گیریم H نمایانگر فضای هیلبرت کلاسیک باشد. آنگاه بنا بر قضایای ۸ و ۱۰ داریم

$$c \leq \text{card } H \leq c^{\aleph_0} = (\aleph_0^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c$$

از این رو $\text{card } H = c = \text{card } \mathbb{R}$.

۳. مجموعه نقاط شبکه‌ای \mathbb{R}^{\aleph_0} بنا بر مسئله ۵ تمرین ۶.۶ دارای عدد اصلی $\aleph_0^{\aleph_0} = c$ است، و $\text{card } \mathbb{R}^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$ در مسئله ۲ بالا نشان داده شده است.

۴. عدد اصلی مجموعه تمام توابع با یک متغیر حقیقی که فقط مقادیر ۰ و ۱ را اختیار می‌کنند، 2^c است، و عدد اصلی مجموعه تمام توابع حقیقی با n متغیر حقیقی، c^{2n} است. اما چون $c^2 = c$ و $\aleph_0 \cdot c = c$ ، داریم

$$c^{2n} = c^c = (\aleph_0^{\aleph_0})^c = \aleph_0^{\aleph_0 \cdot c} = 2^c$$

۵. از نتیجه مسئله ۴ بالا، داریم $f = 2^c = f^c$ اکنون ملاحظه می‌کنید که

$$f \leq f^{\aleph_0} \leq f^{\aleph_0} \leq f^c = (2^c)^c = 2^{c^2} = 2^c = f$$

تمرین ۱۰.۷

۲. می‌توانیم فرض کنیم که $B \neq \emptyset$ (زیرا اگر $B = \emptyset$ آنگاه $C = \emptyset$). مجموعه

$$\{f^{-1}(y) \mid y \in B\}$$

یک افزای A تشکیل می‌دهد. بنا بر اصل انتخاب، مجموعه $\{f^{-1}(y) \mid y \in B\}$ یک مجموعه C از نمایانگرها دارد به قسمی که $C \cap f^{-1}(y)$ برای هر $y \in B$ یک مجموعه تک‌عضوی است. بنابراین تحدید f به C ، $f|_C : C \rightarrow B$ ، بیژکتیو است. از این رو $\text{card } A \geq \text{card } C = \text{card } B$.

۸. گیریم $g : \{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ بنا بر اصل انتخاب، یک تابع انتخاب باشد. آنگاه یک تابع $f : \Gamma \rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ به صورت $f(\gamma) = g(A_\gamma) \in A_\gamma$ برای تمام $\gamma \in \Gamma$ وجود دارد. از این رو اگر $\Gamma \neq \emptyset$ آنگاه $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \neq \emptyset$.

تمرین ۲۰.۷

۱۲. گیریم \mathcal{C} مجموعه تمام زیر مجموعه‌های کلا مرتب A باشد که شامل B هستند. \mathcal{C}

می‌تواند با رابطه مشمولیت، \subseteq ، مرتب شود. آنگاه برهانی همانند برهان قضیه ۲ در اینجا نتیجه می‌دهد که \mathcal{C} يك عضو ما کسیمال C ، $B \subseteq C$ دارد.

تمرین ۳۰۷

۲. گیریم (A, \leq) يك مجموعه جزئاً مرتب باشد، و مجموعه \mathcal{C} ، از تمام زیر مجموعه‌های کلاً مرتب (A, \leq) به وسیله \subseteq مرتب شده باشد. برای به کار بردن لم تسورن در باره (\mathcal{C}, \subseteq) ، گیریم \mathcal{C} يك زنجیر در (\mathcal{C}, \subseteq) باشد، و $K = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$. نشان خواهیم داد که $K \in \mathcal{C}$ و از این رو شامل يك کران بالا، برای \mathcal{C} خواهد بود. در واقع، اگر $x, y \in K$ ، آنگاه برای بعضی $D \in \mathcal{C}$ و $E \in \mathcal{C}$ ، $x \in E$ و $y \in D$. اما \mathcal{C} يك زنجیر در (\mathcal{C}, \subseteq) است؛ بنا بر این یا $D \subseteq E$ یا $E \subseteq D$. فرض کنید که $E \subseteq D$ ؛ آنگاه $x, y \in D$ اما D کلاً مرتب است، پس یا $x \leq y$ یا $y \leq x$. از این رو K زیر مجموعه کلاً مرتب (A, \leq) است، پس $K \in \mathcal{C}$. حال بنا بر لم تسورن (\mathcal{C}, \subseteq) يك عنصر ما کسیمال دارد.

۳. گیریم R يك حلقه با عنصر یکه ۱ باشد، و گیریم \mathcal{A} مجموعه تمام ایدال‌های سره R ، با \subseteq جزئاً مرتب شده باشد. گیریم \mathcal{C} يك زنجیر در (\mathcal{A}, \subseteq) باشد. آنگاه $\bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$ يك ایده‌آل سره R است زیرا $1 \notin \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$ ، پس $\bigcup_{I \in \mathcal{C}} I \in \mathcal{A}$ يك کران بالای \mathcal{C} است. بنا بر لم تسورن، (\mathcal{A}, \subseteq) يك عضو ما کسیمال دارد.

۴. گیریم V يك فضای برداری باشد، و \mathcal{A} ، مجموعه تمام زیر مجموعه‌های مستقل خطی بردارها در V ، با \subseteq جزئاً مرتب شده باشد. گیریم \mathcal{C} يك زنجیر در (\mathcal{A}, \subseteq) باشد؛ آنگاه $K = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ آشکارا مستقل خطی است و از این رو $K \in \mathcal{A}$ يك کران بالای \mathcal{C} است. بنا بر لم تسورن، (\mathcal{A}, \subseteq) يك عنصر ما کسیمال دارد (که يك پایه V را تشکیل می‌دهد).

۸. گیریم \mathcal{C} با \subseteq جزئاً مرتب شده باشد، و گیریم \mathcal{C} يك زنجیر در (\mathcal{C}, \subseteq) باشد. نشان خواهیم داد که \mathcal{C} يك کران بالا دارد. کاندید طبیعی برای این کران بالا $K = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ است. گیریم $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ يك زیر مجموعه متناهی K باشد. برای بعضی $C_i \in \mathcal{C}$ ، $i = 1, \dots, n$. اما چون \mathcal{C} يك زنجیر است، $C \in \mathcal{C}$ وجود دارد به قسمی که برای تمام n ، $i = 1, 2, \dots$ ، $C_i \subseteq C$. از این رو $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq C$ و در نتیجه $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathcal{C}$. بنا بر این $K \in \mathcal{C}$ و از این رو يك کران بالای \mathcal{C} است. بنا بر لم تسورن، (\mathcal{C}, \subseteq) يك عنصر ما کسیمال دارد.

تمرین ۴۰۷

۲. چون مجموعه \mathbf{Q} شمارای نامتناهی است، يك بیژ کسیون $\mathbf{Q} \sim \mathbf{N}$ وجود دارد. رابطه \leq را روی \mathbf{Q} به صورت، $p \leq q$ اگر و تنها اگر در \mathbf{N} ، $f(p) \leq f(q)$ ، برای هر

p و q در \mathbf{Q} تحت ترتیب طبیعی اعداد طبیعی تعریف می‌کنیم. چون (\mathbf{N}, \leq) خوشترتیب است، پس (\mathbf{Q}, \leq) نیز هست.

۷. اگر (A, \leq) خوشترتیب باشد، نمی‌تواند شامل دنباله اکیداً نزولی باشد، زیرا این يك زیرمجموعه بدون کوچکترین عنصر است. به‌عبارت دیگر، فرض کنید که مجموعه کلاً مرتب (A, \leq) خوشترتیب نیست. آنگاه زیرمجموعه B از A وجود دارد که کوچکترین عنصر ندارد. $a_1 \in B$ را انتخاب کنید. چون a_1 کوچکترین عنصر B نیست، می‌توانیم $a_2 \in B$ را چنان انتخاب کنیم که $a_2 > a_1$. به‌طوریکه مشابه $a_3 \in B$ را می‌توانیم چنان انتخاب کنیم که $a_3 > a_2$. بسا ادامه این وضع، يك دنباله اکیداً نزولی نامتناهی داریم $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$

تمرین ۲۰۸

۷.۵

تمرین ۳۰۸

۴. گیریم $\alpha = \omega$ ، $\beta = 0$ و $\gamma = 1$. آنگاه $\beta + \alpha = \omega = \gamma + \alpha$ اما $\beta \neq \gamma$.
 ۶. همان مثال مسئله ۴ بالا را به‌کار برید. $\beta = 0$ ، $\alpha = \omega$ ، $\gamma = 1$ اما $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$.

تمرین ۴۰۸

۴. گیریم $\alpha = \omega$ ، $\beta = \gamma = 1$. آنگاه $\beta\alpha = \gamma\alpha = \omega = 2\omega$ اما $(\beta + \gamma)\alpha \neq \beta\alpha + \gamma\alpha$.

$$\beta\alpha + \gamma\alpha = \omega + \omega = 2\omega$$

بنابراین $(\beta + \gamma)\alpha \neq \beta\alpha + \gamma\alpha$.

۸. گیریم $\alpha = 1$ ، $\beta = 2$ و $\gamma = \omega$. آنگاه $\beta < \alpha$ و $\gamma > 0$ اما

$$\alpha\gamma = 1 \cdot \omega = \omega = 2\omega = \beta\gamma$$

تمرین ۵۰۸

۳. گیریم X يك مجموعه باشد. بنا بر اصل خوشترتیبی، مجموعه X می‌تواند خوشترتیب باشد. گیریم $\{ \leq \}$ روی X يك رابطه خوشترتیب است $| \text{ord}(X, \leq) | = S$. بنا بر قضیه ۱۲، S خوشترتیب است. از این رو باید کوچکترین عنصر منحصر به فرد، عدد ترتیبی آغازی X ، دارد.

فهرست نمادها

تساوی	\sim
و	\wedge
یا	\vee
اگر ... آنگاه	\rightarrow
اگر و تنها اگر، اگر و فقط اگر	\leftrightarrow
هم‌ارز است با	$\equiv (\Leftrightarrow)$
نتیجه می‌دهد	\Rightarrow
برای همه، برای هر	\forall
وجود دارد، برای بعضی	\exists
نتیجه	\therefore
a عنصر A است	$a \in A$
a عنصر A نیست	$a \notin A$
مجموعه متشکل از عناصر x, y, \dots, z	$\{x, y, \dots, z\}$
مجموعه تمام x هایی که $p(x)$ راست است.	$\{x p(x)\}$
مجموعه تمام اعداد طبیعی	\mathbb{N}
مجموعه تمام اعداد صحیح	\mathbb{Z}
مجموعه تمام اعداد گویا	\mathbb{Q}
مجموعه تمام اعداد حقیقی	\mathbb{R}
مجموعه تمام اعداد حقیقی مثبت	\mathbb{R}_+
A زیرمجموعه B است.	$A \subseteq B$

A زیر مجموعه B نیست.	$A \not\subseteq B$
A زیر مجموعه سره B است.	$A \subset B$
A ابرمجموعه B است.	$A \supseteq B$
مجموعه تهی	\emptyset
اشترک مجموعه‌های A و B	$A \cap B$
اجتماع مجموعه‌های A و B	$A \cup B$
مجموعه توانی A (مجموعه تمام زیرمجموعه‌های A)	$\mathcal{P}(A)$
اشترک مجموعه‌های C_γ ، که در آن $\gamma \in \Gamma$	$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma$
اجتماع مجموعه‌های C_γ ، که در آن $\gamma \in \Gamma$	$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma$
اشترک مجموعه‌های C_1, C_2, \dots, C_n	$\bigcap_{k=1}^n C_k$
اجتماع مجموعه‌های C_1, C_2, \dots, C_n	$\bigcup_{k=1}^n C_k$
اشترک مجموعه‌های A متعلق به خانواده \mathcal{A}	$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$
اجتماع مجموعه‌های A متعلق به خانواده \mathcal{A}	$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$
جفت مرتب عناصر a و b	(a, b)
حاصلضرب دکارتی A و B	$A \times B$
حوزه رابطه \mathcal{R}	$\text{Dom}(\mathcal{R})$
نگاره \mathcal{R}	$\text{Im}(\mathcal{R})$
وارون رابطه \mathcal{R}	\mathcal{R}^{-1}
رابطه همانی روی X	Δ_X
رابطه هم‌ارزی	\mathcal{E}
رده هم‌ارزی که با x و \mathcal{E} مشخص می‌شود	x/\mathcal{E}
مجموعه رده‌های هم‌ارزی x/\mathcal{E} که در آن $x \in X$	X/\mathcal{E}
افراز مجموعه	\mathcal{P}
رابطه هم‌ارزی القایی روی X با افراز \mathcal{P}	X/\mathcal{P}
تابع f از X به Y	$f: X \rightarrow Y$
تابع همانی روی X	$I_X: X \rightarrow X$
تابع مشخصه $A \subseteq X$	$\chi_A: X \rightarrow \{1, 2\}$
تابع $f: X \rightarrow Y$ یک تناظر یک به یک است.	$f: X \sim Y$
مجموعه تمام توابع از A به $\{1, 2\}$	2^A
مجموعه تمام توابع از A به B	B^A

A هم‌توان B است.	$A \sim B$
عدد اصلی مجموعه A	$\text{card } A$
عدد اصلی مجموعه اعداد طبیعی	\aleph_0
عدد اصلی مجموعه اعداد حقیقی	c
عدد اصلی مجموعه تمام توابع از \mathbf{R} به \mathbf{R}	f
قطعه $\{a \in A \mid a < x\}$ از مجموعه خوشترتیب (A, \leq)	A_x
مجموعه‌های خوشترتیب (A, \leq) و (B, \leq') هم‌ریخت	$(A, \leq) \approx (B, \leq')$
ترتیبی هستند	
عدد ترتیبی (A, \leq)	$\text{ord}(A, \leq)$
عدد ترتیبی (\mathbf{N}, \leq)	ω

مراجع برگزیده

برای کسانی که می‌خواهند مطالعه بیشتری در نظریه مجموعه‌ها داشته باشند، کتابهای زیر را توصیه می‌کنیم:

۱. کتابهای تاریخی و فلسفی

- Benaceraf, Paul, and Hilary Putnam, eds. *Philosophy of Mathematics*.
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1964.
- Van Heijenoort, Jean, ed. *From Frege to Gödel*. Harvard University
Press, Cambridge, Mass., 1967.
- Wilder, Raymond L. *Introduction to the Foundations of Mathematics*.
2nd ed. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965.

۲. کتابهای مربوط به منطق

- Copi, Irving M. *Symbolic Logic*. 3rd ed. The Macmillan Company,
1976.
- Kleene, Stephen C. *Mathematical Logic*. John Wiley & Sons, Inc.,
New York, 1967.

۳. کتابهای مربوط به نظریه مجموعه‌ها

- Fraenkel, Abraham A. *Set Theory and Logic*. Addison-Wesley Publi-
shing Company, Inc., Reading, Mass., 1966.
- Halmos, Paul R. *Naive Set Theory*. D. Van Nostrand Company, Inc.,
Princeton, N. J., 1960.
- Hayden, Seymour, and John F. Kennison. *Zermelo-Fraenkel Set Theory*.

مراجع برتزیده ۲۱۹

- Charles E. Merrill Publishing Company, Columbus, Ohio, 1968.
- Monk, J. Donald. *Introduction to Set Theory*. McGraw-Hill, Inc., New York, 1969.
- Pinter, Charles C. *Set Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1971.
- Suppes, Patrick. *Axiomatic Set Theory*. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1960.

۴. کتابهای مربوط به جبر بول و کاربردهای آن

- Boole, G. *An Introduction of the Law of Thought*. Dover Publications, Inc., New York, 1954.
- Mano, M. Morris. *Digital Logic and Computer Design*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1979.

واژه‌نامه انگلیسی-فارسی

absorption laws	قوانین جذب
admissible subset	زیرمجموعه پذیرفتنی
aleph-null	الف - صفر
antichain	پاد زنجیر
antisymmetric relation	رابطه پادمتقارن
associative laws	قوانین شرکتپذیری
axiom	اصل موضوع
- of cardinality	اصل موضوع اعداد اصلی
- of choice	اصل موضوع انتخاب
- of power sets	اصل موضوع مجموعه‌های توانی
- of specification	اصل موضوع تصریح
biconditional connective	رابط دوشروطی
biconditional statement	گزاره دوشروطی
binary variable	متغیر دوتایی
cardinal sum	مجموع اصلی
cardinal number	عدد اصلی
cardinal product	حاصلضرب اصلی
cartesian product	حاصلضرب دکارتی
characteristic function	تابع مشخصه
choice function	تابع انتخاب
complementation	متممگیری

conditional connective	رابطه شرطی
conditional statement	گزاره شرطی
congruence relation	رابطه هم‌نهشتی
conjunction	عاطف، ترکیب عطفی
connective	رابطه
constructive dilemmas	قیاس ذوالوجهین موجب
contrapositive law	قانون عکس نقیض
countable set	مجموعه شمارا
counter example	مثال نقیض
deductive method	روش قیاسی
deductive reasoning	استدلال قیاسی
denumerable set	مجموعه شمارای نامتناهی
destructive dilemmas	قیاس ذوالوجهین منفی
diagonal relation	رابطه قطری
disjunction	ترکیب فصلی
disjunctive syllogism	قانون دفع مؤلفه
distributive laws	قوانین پخشپذیری
domain of discourse	حوزه سخن
double negation	نفی مضاعف
equipotence	هم‌توانی
equivalence relation	رابطه هم‌ارزی
equivalence class	رده هم‌ارزی
exclusive disjunction	بای مانع جمع
existential quantifier	سور وجودی
exportation law	قانون تفکیک دو مقدم
finite cardinal number	عدد اصلی متناهی
finite character	مشخصه متناهی
formal proof of validity	برهان درستی
full-adder	تمام-فزونگر
full-subtractor	تمام-تفاضلگر
gate	دریچه

generalized continuum hypothesis	فرض پیوستار تعمیم‌یافته
half-adder	نیم-فزونگر
half-subtractor	نیم-تفاضلگر
Hausdorff maximality principle	اصل ماکسیمال هاوزدورف
identity function	تابع همانی
image	نگاره
implementation	پیاده‌سازی
implication	استلزام
inclusion function	تابع شمول
inclusive disjunction	یا شمول
induction hypothesis	فرض استقرا
inverse function	تابع وارون
inverse image	نگاره وارون
inverter	وارونگر
lattice point	نقطه شبکه‌ای
law	قانون
laws of idempotence	قانونهای خودتوانی
lexicographic ordering	ترتیب الفبایی
linearly ordered set	مجموعه مرتب خطی
linear order	ترتیب خطی
literal	لفظ
logically equivalent	هم‌ارز منطقی
logic circuit	مدار منطقی
logic gate	دریچه منطقی
mathematical induction	استقرای ریاضی
modus ponens	قیاس استثنایی
modus tollens	قیاس دفع
negation	نقیض، نفی
nondenumerable set	مجموعه ناشمارا

واژه‌نامه انگلیسی-فارسی ۲۲۳

order isomorphism	هم‌ریختی ترتیبی
ordinal number	عدد ترتیبی
ordinal sum	مجموع ترتیبی
partial order relation	رابطه ترتیب جزئی
partition	افراز
partially ordered set	مجموعه جزئاً مرتب
preimage	پیشنگاره
premises	مقدمات
propositional predicate	گزاره‌نما
quantification rules	قواعد تصویر
quantified statement	گزاره مسور
quantifier	سور
- negation	نقیض سور
rules of inference	قاعده‌های استنتاج
set	مجموعه
- builder notation	نماد مجموعه‌ساز
simplification laws	قوانین اختصار
simplified truth table	جدول ارزش اختصاری
specification of sets	تصریح مجموعه‌ها
strictly decreasing function	تابع اکیداً نزولی
strictly increasing function	تابع اکیداً صعودی
successor	تالی
superset	ابر مجموعه
symmetric difference	تفاضل متقارن
tautology	راستگو
total order relation	رابطه کلاً مرتب
totally ordered set	مجموعه کلاً مرتب
transcendental number	عدد متعالی
transfinite cardinal number	عدد اصلی ترامتناهی
transfinite induction	استقرای ترامتناهی

universal quantifier

universal set

universe of discourse

well-ordered set

well-ordering principle

سور عمومی

مجموعه جهانی

عالم سخن

مجموعه خوشترتیب

اصل خوشترتیبی

واژه‌نامه فارسی-انگلیسی

superset	ابر مجموعه
deductive reasoning	استدلال قیاسی
transfinite induction	استقرای ترامتناهی
mathematical induction	استقرای ریاضی
implication	استلزام
well-ordering principle	اصل خوشترتیبی
Hausdorff maximality principle	اصل ماکسیمال هاوسدورف
axiom	اصل موضوع
axiom of cardinality	- اعداد اصلی
axiom of choice	- انتخاب
axiom of specification	- تصریح
axiom of power sets	- مجموعه‌های توانی
partition	افراز
aleph-null	الف - صفر
formal proof of validity	برهان درستی
antichain	پاد زنجیر
implementation	پیاده‌سازی
preimage	پیشنگاره
function	تابع
strictly increasing function	- اکیداً صعودی
strictly decreasing function	- اکیداً نزولی

choice function	- انتخاب
inclusion function	- شمول
characteristic function	- مشخصه
inverse function	- وارون
identity function	- همانی
successor	تالی
lexicographic ordering	ترتیب الفبایی
linear order	ترتیب خطی
	ترکیب عطفی ← عاطف
disjunction	ترکیب فصلی
specification of sets	تصریح مجموعه‌ها
symmetric difference	تفاضل متقارن
full-subtractor	تمام-تفاضلگر
full-adder	تمام-فزونگر
truth table	جدول ارزش
simplified truth table	- اختصاری
cardinal product	حاصلضرب اصلی
cartesian product	حاصلضرب دکارتی
domain of discourse	حوزه سخن
gate	دریچه
logic gate	دریچه منطقی
connective	رابط
biconditional connective	- دوشرطی
conditional connective	- شرطی
relation	رابطه
antisymmetric relation	- پادمتقارن
partial order relation	- ترتیب جزئی
diagonal relation	- قطری
total order relation	- کلاً مرتب
equivalence relation	- هم‌ارزی
congruence relation	- هم‌نهشتی

واژه نامه فارسی-انگلیسی ۲۲۷

tautology	راستگو
equivalence class	رده هم‌ارزی
deductive method	روش قیاسی
admissible subset	زیرمجموعه پذیرفتنی
quantifier	سور
universal quantifier	- عمومی
existential quantifier	- وجودی
conjunction	عاطف
universe of discourse	م: ترکیب عطفی
cardinal number	عالم سخن
transfinite cardinal number	عدد اصلی
finite cardinal number	- ترامتناهی
ordinal number	- متناهی
transcendental number	عدد ترتیبی
	عدد متعالی
hypothesis	فرض
induction hypothesis	- استقرا
generalized continuum hypothesis	- پیوستار تعمیم یافته
rules of inference	قاعده‌های استنتاج
law	قانون
transitive law	- متعدی
exportation law	- تفکیک دو مقدم
disjunctive syllogism	- دفع مؤلفه
contrapositive law	- عکس نقیض
laws of idempotence	- های خود توانی
quantification rules	قواعد تسویر
simplification laws	قوانین اختصار
distributive laws	قوانین پخشپذیری
absorption laws	قوانین جذب

associative laws	قوانین شرکتپذیری
modus ponens	قیاس استثنایی
modus tollens	قیاس دفع
destructive dilemmas	قیاس ذوالوجهین منفی
constructive dilemmas	قیاس ذوالوجهین موجب
biconditional statement	گزاره دوشروطی
conditional statement	گزاره شرطی
quantified statement	گزاره مسور
propositional predicate	گزاره نما
literal	لفظ
binary variable	متغیر دوتایی
complementation	متممگیری
counter example	مثال نقیض
cardinal sum	مجموع اصلی
ordinal sum	مجموع ترتیبی
set	مجموعه
partially ordered set	- جزئاً مرتب
universal set	- جهانی
well-ordered set	- خوشترتیب
countable set	- شمارا
denumerable set	- شمارای نامتناهی
totally ordered set	- کلاً مرتب
linearly ordered set	- مرتب خطی
nondenumerable set	- ناشمارا
logic circuit	مدار منطقی
finite character	مشخصه متناهی
premises	مقدمات
double negation	نفی ← نقیض
lattice point	نقی مضاعف
negation	نقطه مشبکه‌ای
	نقیض

واژه نامه فارسی-انگلیسی ۲۲۹

quantifier negation

image

inverse image

set builder notation

half-subtractor

half-adder

inverter

logically equivalent

equipotence

order isomorphism

inclusive disjunction

exclusive disjunction

مت: نفی

تقدیس سور

نگاره

نگاره وارون

نماد مجموعه ساز

نیم-تفاضلگر

نیم-فزونگر

وارونگر

هم ارز منطقی

همتوانی

همریختی ترتیبی

بای شمول

بای مانع جمع

فهرست راهنما

- ۱۵۶ - ماکسیمال هاوسدورف
- ۶۳ - مجموعه تهی
- ۶۲، ۴۲ - مجموعه‌های توانی
- اصول موضوع
- ۱۳۲ - اعداد اصلی
- ۱۸۲ - پثانو
- اعداد
- ۱۳۱ - اصلی
- ۱۶۹، ۱۶۸ - ترتیبی
- ۱۲۸ - جبری
- ۴۱ - حقیقی
- ۴۱ - حقیقی مثبت
- ۴۱ - صحیح
- ۴۱ - طبیعی
- ۴۱ - گویا
- ۱۳۵ - متعالی
- ۲۴ - موهومی
- اعداد اصلی ۱۳۱
- اصول موضوع - ۱۳۲
- ۱۳۳، ۱۳۱ - ترامتاهی
- توان - ۱۴۲
- جمع - ۱۳۸
- ضرب - ۱۴۵
- قواعد - ۱۳۲
- ابر مجموعه ۳۸
- ابر مجموعه سره ۳۸
- ارزش راستی گزاره ۳
- استدلال درست ۳
- استدلال قیاسی ۲۱
- استدلال نادرست ۳
- استقرا
- فرض - ۳۲
- ۱۶۴ - ی ترامتاهی
- ۳۲ - ی ریاضی
- استلزام ۱۷
- اصل ← اصل موضوع
- اصل موضوع
- اجتماع ۶۳
- استقرای ترامتاهی ۱۶۴
- استقرای ریاضی ۱۸۲، ۳۲
- اعداد اصلی ۱۳۲
- انتخاب ۱۵۲، ۱۲۵
- تسورن (لم) ۱۵۷
- تصریح ۶۲، ۴۱
- تعمیم ۶۳
- توازی اقلیدس ۱۶۶
- جفت سازی ۶۳
- خوشترتیبی تسرملو ۱۶۵

- بورالی-فورتی
 پارادوکس - ۱۸۱، ۱۶۸
 بول، ج. ۹۷
 تابع - ۱۰۲
 جبر - ۹۷
 بیت ۱۰۶
 پتانو، ج. ۱۸۵، ۱۸۲
 پاد زنجیر ۱۵۷
 پارادوکس
 - بورالی-فورتی ۱۸۱، ۱۶۸
 - راسل ۴۱، ۳۷
 پخشپذیری
 - اجتماع نسبت به اشتراك ۴۵
 - اشتراك نسبت به اجتماع ۴۵
 - حاصلضرب دکارتی نسبت به اشتراك ۶۶
 - حاصلضرب دکارتی نسبت به متممگیری ۶۶
 - ضرب نسبت به جمع (اعداد اصلی) ۱۴۱
 - ضرب نسبت به جمع (اعداد طبیعی) ۱۸۴
 - ونسبت به یا ۱۶
 - یا نسبت به و ۱۶
 پخشپذیری تعمیم یافته
 - اجتماع نسبت به اشتراك ۵۹
 - اشتراك نسبت به اجتماع ۵۹
 پیاده‌سازی ۱۰۷
 پیوستار ۱۳۹
 تابع ۷۷
 - اکیداً صعودی ۱۶۴
 - انتخاب ۱۵۲
 - منتهای ۱۳۱، ۱۳۳
 مقایسه - ۱۳۳
 اعداد ترتیبی ۱۶۸، ۱۶۹
 - آغازی ۱۸۱
 - ترامنتهای ۱۶۸
 ترتیب - ۱۷۰
 جمع - ۱۷۳
 ضرب - ۱۷۶
 قواعد - ۱۶۹
 - منتهای ۱۶۸
 - نامنتهای ۱۶۸
 اعداد طبیعی ۴۱
 اصول موضوع پتانودر - ۱۸۲
 ترتیب - ۱۸۵
 جمع - ۱۸۲
 ضرب - ۱۸۴
 عدد ترتیبی مجموعه - ۱۶۹
 افراز ۷۳
 اقلیدس ۱۱۷، ۱۶۶
 اکیداً صعودی ۱۶۴
 اکیداً نزولی ۱۶۲
 امکان منطقی ۶
 انژکسیون ۸۸
 برد تابع ۷۸
 برنشتاین ۱۳۳
 برهان ۱۳
 - خلف ۲۹
 - درستی ۲۶
 - درستی صوری ۲۸
 - غیرمستقیم ۲۹
 - مستقیم ۲۹
 بزرگترین کران پایین ۱۵۲
 بلوك سخت افزار ۱۰۶

- همریختی - ۱۶۸
 ترکیب
 - توابع ۹۳
 - دوشروطی ۱۱
 - شرطی ۹
 - عطفی ۵
 - فصلی ۹
 تسورن ۱۵۱، ۱۵۷، ۱۵۹، ۱۶۲
 لم - ۱۵۷
 تصریح مجموعه‌ها ۴۵
 تعریف استقرایی ۳۳
 تعلق ۳۸
 عدم - ۳۸
 تعمیم
 - فرضیه (مسئله) پیوستار ۱۴۹
 - قانون پخشپذیری اجتماع نسبت به اشتراك ۵۹
 - قانون پخشپذیری اشتراك نسبت به اجتماع ۵۹
 - قانون دمورگن (گزاره‌ها) ۳۵
 - قانون دمورگن (مجموعه‌ها) ۵۸
 تفاضل متقارن ۵۱
 تمام-تفاضلگر ۱۱۴
 تمام-فزونگر ۱۱۵
 تمامیت منطق تصویر ۱۴۹
 تناظر يك به يك ۸۹
 تناقض ۱۹
 توان عدد ۳۳
 جا به جایی
 - اجتماع و اشتراك ۴۵
 - جمع و ضرب اعداد اصلی ۱۴۱
 - جمع و ضرب اعداد طبیعی ۱۸۳، ۱۸۴
 جایگشت ۹۲
 - انژکتیو ۸۸
 برد - ۷۸
 بول ۱۵۲
 - بول اساسی ۱۵۴
 - بیژکتیو ۸۹
 - پوششی ۸۸
 تحدید - ۱۴۶
 - ترکیب ۹۳
 - تصویر ۸۷
 - ثابت ۸۱
 - جزء صحیح ۷۸
 - دوسویی ۸۹
 - سورژکتیو ۸۸
 - شمولی ۸۳
 - صعودی ۱۶۴
 - مشخصه ۸۵
 - وارون ۹۱
 - همانی ۸۵
 - يك به يك ۸۸
 تالی ۱۸۲
 تحدید تابع ۱۴۶
 تحدید رابطه ۷۲
 ترتیب
 - اعداد ترتیبی ۱۷۵
 - اعداد طبیعی ۱۸۵
 - جزئی ۱۵۲
 - خطی ۱۵۲
 - کلی ۱۵۲
 ترتیبی
 اعداد - ۱۶۸، ۱۶۹
 جمع - ۱۷۳
 حساب - ۱۶۸
 ضرب - ۱۷۶، ۱۷۷
 همریخت - ۱۶۸

- جبر بول ۹۷
 جدول ارزش
 - تابع بول ۱۰۲
 - ترکیب دو شرطی ۱۱
 - ترکیب شرطی ۱۰
 - ترکیب عطفی ۵
 - ترکیب فصلی ۹
 - گزاره ۵
 - نفی گزاره ۵
 جفت مرتب ۶۴
 جمع
 - اعداد اصلی ۱۳۸
 - اعداد ترتیبی ۱۷۳
 - اعداد طبیعی ۱۸۲
 - درجبر بول ۹۸
 جمله خبری ۳
 - دروغ ۳
 - راست ۳
 حالت منطقی ۶
 حکم درست ۲۶
 حوزه رابطه ۶۹
 حوزه سخن ۲۳
 خانواده مجموعه‌ها ۵۵
 خانواده مجموعه‌های اندیس‌دار ۵۵
 خوشترتیب
 رابطه - ۱۶۰
 مجموعه - ۱۶۰
 خوشترتیبی
 اصل - ۱۶۰
 ددکیند، ر. ۱۱۷
 درجه منطقی ۱۰۶
 رابط ۳، ۴
 - دوشروطی ۱۱، ۴
 - شرطی ۹، ۴
 - نفی ۵، ۴
 - و ۹، ۴، ۵
 - یا ۹، ۴
 رابطه ۶۸
 - القیابی ۱۷۶
 - انعکاسی ۷۰
 - پادمتقارن ۱۵۲
 تحدید - ۷۲
 - ترتیب در اعداد طبیعی ۱۸۵
 - ترتیبی جزئی ۱۵۲، ۱۰۲
 - ترتیبی خطی ۱۵۲
 - ترتیبی کلی ۱۵۲
 حوزه - ۶۹
 - قطری ۷۰
 - متعدی ۷۰
 - متقارن ۷۰
 - وارون ۹۰، ۶۹
 - هم‌ارزی ۷۰
 - همانی ۷۰
 - همنهشتی ۷۰
 راسل، ب. ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۱۲۹
 پارادوکس - ۶۱، ۲۸، ۳۷
 مجموعه - ۶۱
 وده هم‌ارزی ۷۳
 رقم نقلی ۱۱۰
 روش قطری ۱۲۹
 روش قیاسی ۲۱
 زبان صوری ۱۰
 زنجیر ۱۵۳
 پاد - ۱۵۷

دکارتی تعمیم یافته ۱۵۲، ۱۴۲ -	زیرمجموعه ۳۸
ضریب زوجله ای ۳۴	- پذیرفتنی ۱۵۵
	- سره ۳۸
عالم سخن ۲۳	- کلا' مرتب ۱۵۳
عدد ← اعداد	
عمل دوتایی ۹۷، ۵۲	ساده کردن يك گزاره مرکب ۷
عنصر ۶۲، ۲۸، ۳۷	سورژکسیون ۸۸
- صفر ۹۸	سور عمومی ۲۳
کوچکترین - ۱۶۰	سور وجودی ۲۴
- ماکسیمال ۱۵۴	سیگنال ۱۰۶
- متمم ۹۸	
- مینیمال ۱۵۴	شرط کافی ۱۲
- همانی ۹۸	شرط لازم ۱۲
- بکه ۹۸	شرکت پذیری
	- اجتماع ۴۵
فاصله	- اشتراك ۴۵
- باز ۵۷	- ترکیب توابع ۹۴
- بسته ۶۰	- جمع و ضرب اعداد اصلی ۱۴۱
- نیم باز ۶۰	- جمع و ضرب اعداد ترتیبی ۱۷۸، ۱۷۲
- نیم بسته ۶۰	- جمع و ضرب اعداد طبیعی ۱۸۴، ۱۸۳
فرض پیوستار ۱۳۱، ۱۴۹، ۱۶۶	- و ۱۶
- تعمیم یافته ۱۳۱، ۱۴۹	- یا ۱۶
فضای هیلبرت کلاسیک ۱۴۸	شرودر ۱۳۳
قاعده نقیض سور ۲۴	صعودی
قاعده های استنتاج ۲۱	تابع - ۱۶۴
قانون	تابع اکیداً - ۱۶۴
- اختصار ۱۳	
- برهان خلف ۱۸	ضرب
- پخش پذیری ← پخش پذیری	- اعداد اصلی ۱۴۱
- پخش پذیری تعمیم یافته ← پخش پذیری	- اعداد ترتیبی ۱۷۷، ۱۷۶
تعمیم یافته	- اعداد طبیعی ۱۸۲
- تعدی ۱۶	- در جبر بول ۹۸
- تفکیک دو مقدم ۲۲	- دکارتی ۶۵، ۶۴

۱۶۶، ۱۳۹، ۱۳۶، ۱۳۳، ۱۲۹
 کران بالا
 کوچکترین - ۱۵۲
 - ی مجموعه ۱۵۲
 کران پایین
 بزرگترین - ۱۵۲
 - مجموعه ۱۵۲
 کوچکترین عنصر ۱۶۰
 کوچکترین کران بالا ۱۵۲
 کوهن، پ. ۱۵۰
 گاوس، کارل فریدریش ۱۱۷
 گروه (جبری) ۵۲
 گزاره ۳
 ارزش راستی - ۳
 - دروغ ۳
 - دوشروطی ۱۱
 - راست ۳
 - راستگو ۱۳
 - ساده ۴
 - شرطی ۹
 - مرکب ۴
 - مسور ۲۴
 نفی - ۵
 نقیض - ۵
 نمایش - ۴
 گزاره نما ۲۴
 گودل، ک. ۱۶۶، ۱۴۹
 لفظ ۱۰۳
 لم تسورن ۱۵۷
 ماکسیمال
 عنصر - ۱۵۲

- جا به جایی ← جا به جایی
 - جذب ۱۸
 - جمع ۱۳
 - حذف ۱۸۲، ۱۸۳
 - خودتوانی ۲۵، ۱۴
 - دمورگن ۱۰۰، ۴۱، ۱۵
 - دمورگن تعمیم یافته ۵۸، ۳۵، ۲۵
 - رفع مؤلفه ۱۳
 - شرکتپذیری ← شرکتپذیری
 - عطف ۲۸
 - عکس نقیض ۱۴
 - قیاس استثنایی ۱۸
 - قیاس دفع ۱۸
 - قیاس ذوالوجهین منفی ۱۷
 - قیاس ذوالوجهین موجب ۱۷
 - نفی مضاعف ۱۴
 قضیه ۱۳
 - اصل انتخاب ۱۶۱
 - اصل خوشترتیبی تسرملو ۱۶۰
 - اصل ماکسیمال هاوسدورف ۱۵۶
 - تسورن (لم) ۱۵۷
 - دمورگن ۴۹، ۱۵
 - دمورگن تعمیم یافته ۵۸
 - دو جمله ای ۳۲
 - ساختنی ۱۶۶، ۱۵۸
 - کانتور ۱۳۶
 - وجودی ۱۶۶، ۱۵۸
 قطعه ۱۶۲
 - سره ۱۶۲
 قیاسی
 استدلال - ۲۱
 روش - ۲۱
 کانتور، گئورگ ۱۱۷، ۶۲، ۶۱، ۱۳۷

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------|
| مدار منطقی ۱۰۶ | متعدی |
| مرتب خطی | رابطه - ۷۰ |
| مجموعه - ۱۵۲ | متغیر دوتایی ۱۰۲ |
| مسئله پیوستار ۱۳۷ | متناهی |
| - تعمیم یافته ۱۴۹ | عدد ترتیبی - ۱۶۸ |
| مشبکه ۱۵۹ | مجموعه - ۱۱۷، ۱۱۶، ۱۳۸ |
| مفروضات ۲۶ | مجموعه ۳۷ |
| مقایسه اعداد اصلی ۱۳۳ | ابر - ۳۸ |
| مقدمات ۲۶ | اجتماع چند - ۵۶ |
| مؤلفه ۶ | اجتماع دو - ۴۴ |
| مینیمال | اشترک چند - ۵۷ |
| عصر - ۱۵۴ | اشترک دو - ۴۲ |
| مینیم کردن تابع بول ۱۰۳ | تصریح - ۴۰ |
| نامتناهی | - تک عنصری ۱۱۷ |
| عدد ترتیبی - ۱۶۸ | - تمام توابع از A به B ۱۴۳ |
| نتیجه ۲۶ | - تمام مجموعه‌ها ۶۱، ۴۸ |
| نزولی | - توانی ۱۵۳، ۴۲ |
| اکیداً - ۱۲۶ | - تهی ۳۸ |
| نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها ۶۳، ۳۷ | - جزئاً مرتب ۱۵۲ |
| نفی گزاره ۵ | - جهانی ۶۱، ۴۸ |
| نقطه مشبکه‌ای ۱۲۸ | - خوشترتیب ۱۶۰ |
| نقیض سازی سور ۲۲ | - راسل ۶۱ |
| نقیض گزاره ۵ | - شمارا ۱۲۳ |
| نگاره ۶۹ | - شمارای نامتناهی ۱۲۳ |
| نماد مجموعه‌ساز ۴۱ | - کلاً مرتب ۱۵۲ |
| نمایش مجموعه ۳۸ | - متناهی ۱۱۷، ۱۱۶، ۳۸ |
| نمودار ون ۵۲ | - مرتب خطی ۱۵۲ |
| نیم-تفاضلگر ۱۱۴ | - ناشمارا ۱۲۸ |
| نیم-فزونگر ۱۱۰ | - نامتناهی ۱۱۷، ۱۱۶، ۳۸ |
| وارونگر ۱۰۶ | نمایش - ۳۸ |
| وایتهد، آ. ۱۴۹، ۶۱ | مجموعه‌های مجزا ۴۲ |
| | مجموعه‌های هم‌توانی ۱۲۲ |
| | مدار الکتریکی ۱۰۷، ۱۰۶، ۹۷ |
| | مدار رقمی ۱۰۷، ۱۰۴، ۹۷ |

عنصر - ۹۸	هالموس، پل ۶۲
همتوانی مجموعه‌ها ۱۲۲	هاوسدورف ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۶، ۱۵۷،
همریخت ترتیبی ۱۶۸	۱۵۸
همریختی ترتیبی ۱۶۸	هم‌ارز منطقی ۹
هیلبرت، د. ۱۴۸، ۱۴۹	هم‌ارزی
یای شمول ۸	- دو تابع بول ۱۰۸
یای مانع جمع ۸، ۱۰۸	- دو گزاره ۱۴، ۹
يك به يك	رابطه - ۷۰
تابع - ۸۸	همانی
تناظر - ۸۹	تابع - ۸۰
	رابطه - ۷۰



ISBN: 978-964-01-0462-0



9 789640 104620